



## Plasticité et Rupture

Jean-Jacques Marigo

### ► To cite this version:

Jean-Jacques Marigo. Plasticité et Rupture. École d'ingénieur. Plasticité et Rupture, 91128-Palaiseau, France. 2016, pp.265. cel-01374813

**HAL Id: cel-01374813**

**<https://hal.science/cel-01374813>**

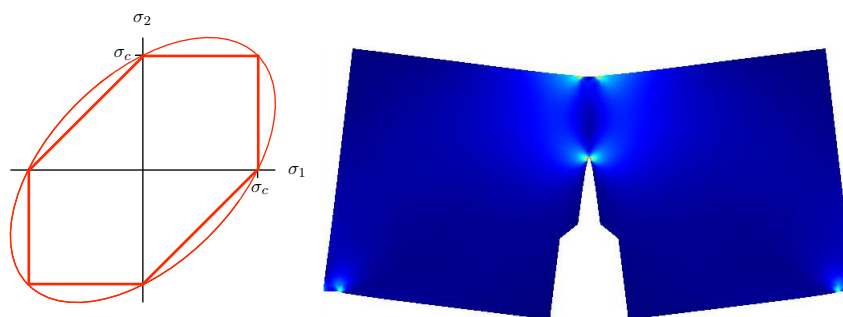
Submitted on 31 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**MEC 551**

## **Plasticité et Rupture**



Année 3

Programmes d'approfondissement:

Mécanique  
Energies du XXI<sup>e</sup> siècle  
Mathématiques Appliquées

**Jean-Jacques Marigo**

Département de Mécanique

Edition 2016



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Elasticité</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Rappels de Mécanique des Milieux Continus</b>	<b>11</b>
1.1	Configurations, déplacements . . . . .	11
1.2	Déformations . . . . .	12
1.3	Tenseur des contraintes et efforts intérieurs . . . . .	14
1.4	Chargement et équilibre volumiques . . . . .	15
1.5	Conditions de continuité aux interfaces . . . . .	15
1.6	Conditions aux limites . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Elastostatique</b>	<b>19</b>
2.1	Le comportement élastique . . . . .	19
2.1.1	Elasticité linéaire sans précontraintes . . . . .	19
	Les relations contrainte-déformation pour un matériau isotrope . . . . .	20
	Les relations entre les coefficients d'élasticité . . . . .	21
	Interprétation des coefficients d'élasticité . . . . .	21
2.1.2	Elasticité linéaire avec précontraintes . . . . .	22
2.2	Le problème aux limites . . . . .	24
2.2.1	Formulation d'un problème-type . . . . .	24
2.2.2	Problèmes réduits par symétrie . . . . .	25
	Déformations planes . . . . .	25
	Déformations antiplanes . . . . .	26
2.2.3	Quelques problèmes classiques et leurs solutions . . . . .	26
	Essai de traction à force contrôlée d'une éprouvette cylindrique . . . . .	26
	Essai de torsion d'un arbre cylindrique à section circulaire . . . . .	27
	Cylindre circulaire pesant dont la surface latérale est fixée . . . . .	28
	Cylindre creux sous pression externe en déformations planes . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Approche variationnelle</b>	<b>31</b>
3.1	Propriétés variationnelles du problème-type . . . . .	31
3.1.1	Déplacements et contraintes admissibles . . . . .	31
3.1.2	La formulation variationnelle de l'équilibre . . . . .	32
3.1.3	Formulation variationnelle du problème d'élastostatique . . . . .	35
3.1.4	Théorème de l'énergie potentielle . . . . .	36

3.1.5	Théorème de l'énergie complémentaire . . . . .	37
3.2	Quelques propriétés qualitatives générales . . . . .	38
3.3	Extension à d'autres types de conditions aux limites . . . . .	40
3.4	Chargements définis par un nombre fini de paramètres . . . . .	42
3.4.1	Quelques exemples . . . . .	43
3.4.2	Grandeurs duales . . . . .	44
3.4.3	Coefficients de souplesse et coefficients de raideur structurels . . . . .	46
3.5	Quelques conséquences des théorèmes de l'énergie . . . . .	48
3.5.1	Encadrement de la solution . . . . .	48
3.5.2	Un exemple d'application : l'essai de traction à déplacement latéral bloqué . .	49
	Présentation . . . . .	49
	Le problème aux limites et ses propriétés variationnelles . . . . .	50
	Encadrement grossier . . . . .	52
	Cas où $\nu = 0$ . . . . .	52
	Cas où $\nu \neq 0$ . . . . .	52
	Affinement du majorant dans le cas $\nu \neq 0$ . . . . .	53
<b>II</b>	<b>Plasticité</b>	<b>55</b>
<b>4</b>	<b>Introduction au comportement inélastique des matériaux et des structures</b>	<b>57</b>
4.1	Les comportements macroscopiques des matériaux . . . . .	57
4.2	La fissuration et la rupture des structures . . . . .	63
4.3	Les modèles rhéologiques . . . . .	68
4.3.1	Les éléments de base . . . . .	68
4.3.2	Quelques assemblages simples avec masses . . . . .	70
4.3.3	Quelques assemblages simples sans masse . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Le comportement élasto-plastique</b>	<b>73</b>
5.1	Introduction . . . . .	74
5.1.1	Le modèle rhéologique patin-ressort . . . . .	74
5.1.2	Le modèle ressort-patin-ressort . . . . .	79
5.2	Les concepts généraux du comportement élasto-plastique . . . . .	83
5.2.1	Les déformations plastiques et la relation contrainte-déformation . . . . .	84
5.2.2	Le domaine d'élasticité et le seuil de plasticité . . . . .	85
5.2.3	La loi d'écoulement plastique . . . . .	86
5.2.4	L'écrouissage . . . . .	86
	Ecrouissage cinématique . . . . .	87
	Ecrouissage isotrope . . . . .	87
	Autres types d'écrouissage . . . . .	89
5.3	Les spécificités des lois "standards" de plasticité parfaite . . . . .	89
5.3.1	Le comportement élastique parfaitement plastique . . . . .	89
5.3.2	Le postulat de Drucker-Ilyushin . . . . .	90
5.3.3	Le principe du travail plastique maximal de Hill. . . . .	91

5.3.4	Lien entre le postulat et le principe. . . . .	93
5.3.5	La convexité du domaine d'élasticité et la règle de normalité . . . . .	95
5.3.6	Incompressibilité plastique et non bornitude du domaine d'élasticité . . . . .	98
5.4	Les lois standards de Von Mises et de Tresca . . . . .	99
5.4.1	Le modèle standard de Von Mises . . . . .	99
	Le critère de Von Mises . . . . .	99
	La loi d'écoulement . . . . .	100
	La relation contrainte-déformation . . . . .	100
	Essai uniaxial . . . . .	100
	Essai bi-axial . . . . .	101
5.4.2	Le modèle standard de Tresca . . . . .	106
	Le critère de Tresca . . . . .	106
	La loi d'écoulement . . . . .	107
	Essai uni-axial . . . . .	108
	Essai bi-axial . . . . .	110
5.5	Identification expérimentale des critères de plasticité . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Calcul de structures élasto-plastiques</b>	<b>115</b>
6.1	Cas standard parfaitement plastique . . . . .	116
6.1.1	Le problème d'évolution quasi-statique . . . . .	116
6.1.2	Un exemple 3D : la torsion élasto-plastique d'un arbre cylindrique . . . . .	118
	Cas d'un cylindre plein . . . . .	118
	Cas d'un cylindre creux . . . . .	122
6.1.3	Quelques propriétés qualitatives . . . . .	124
	Sur l'unicité des déplacements . . . . .	125
	Les charges limites élastiques . . . . .	127
	L'écrouissage structurel . . . . .	128
	Les charges limites . . . . .	129
6.2	Calcul des charges limites . . . . .	130
6.2.1	Charges supportables . . . . .	130
6.2.2	Approche par l'intérieur . . . . .	131
6.2.3	Approche par l'extérieur . . . . .	133
	Présentation de la méthode . . . . .	133
	Propriétés et exemples de fonctions d'appui . . . . .	135
	Exemples d'illustration de l'approche par l'extérieur . . . . .	136
6.3	Contraintes résiduelles . . . . .	139
6.3.1	Contraintes résiduelles et incompatibilité des déformations plastiques . . . . .	139
6.3.2	L'exemple de la torsion . . . . .	140
6.4	Résolution numérique du problème d'évolution . . . . .	141
6.4.1	Le problème incrémental en temps . . . . .	141
6.4.2	Interprétation énergétique dans le cas standard . . . . .	142
6.4.3	Algorithme de résolution . . . . .	145
6.5	Cas standard avec écrouissage cinématique linéaire . . . . .	147
6.5.1	Unicité de la réponse . . . . .	148

6.5.2	L'exemple de la torsion élasto-plastique d'un arbre cylindrique . . . . .	149
-------	---------------------------------------------------------------------------	-----

### III Rupture 151

#### 7 Les bases de la Rupture Fragile 153

7.1	Les singularités en élasticité . . . . .	154
7.1.1	La question des singularités . . . . .	154
7.1.2	La méthode de recherche des singularités . . . . .	154
7.1.3	Exemples de singularités en élasticité anti-plane . . . . .	155
7.1.4	Exemple de singularités en élasticité plane. . . . .	159
7.2	Le cadre d'hypothèses de la rupture fragile . . . . .	164
7.2.1	La description géométrique des fissures . . . . .	164
7.2.2	Les conditions aux limites sur les lèvres des fissures . . . . .	166
	Fissures intérieures . . . . .	166
	Fissures sur les bords à déplacements contrôlés . . . . .	168
7.2.3	Le cadre quasistatique de l'élasticité linéaire . . . . .	169
7.3	Les singularités en pointe de fissure . . . . .	171
7.3.1	En déformation plane . . . . .	172
7.3.2	En déformation anti-plane. . . . .	174
7.3.3	En 3D. . . . .	174
7.3.4	Exemples de valeurs des facteurs d'intensité des contraintes . . . . .	175
7.4	La ténacité et le critère de propagation des fissures d'Irwin . . . . .	176

#### 8 Le point de vue énergétique 181

8.1	Les grandeurs énergétiques . . . . .	182
8.1.1	Formulation variationnelle de l'équilibre d'un objet fissuré . . . . .	182
8.1.2	L'énergie potentielle . . . . .	186
8.1.3	Le taux de restitution d'énergie potentielle . . . . .	187
8.2	Le calcul de $G$ et la formule d'Irwin . . . . .	191
8.2.1	Une méthode de calcul de $G$ . . . . .	191
8.2.2	La formule d'Irwin . . . . .	195
8.3	L'hypothèse de Griffith sur l'énergie de fissuration . . . . .	197
8.3.1	L'énergie de fissuration . . . . .	197
8.3.2	Le taux de création d'énergie de fissuration . . . . .	200
8.4	La loi de propagation de Griffith . . . . .	201
8.4.1	Les principes sur lesquels s'appuient la loi de Griffith . . . . .	201
8.4.2	Etat de fissuration ne dépendant que d'un paramètre . . . . .	202
8.4.3	Etat de fissuration dépendant de $n$ paramètres . . . . .	203
8.4.4	Propagation d'une fissure plane en 3D . . . . .	204

<b>9 Etude de la théorie de Griffith</b>	<b>205</b>
9.1 Exemples de propagation suivant la loi de Griffith . . . . .	206
9.2 Quelques propriétés générales . . . . .	215
9.2.1 Démarrage de la propagation . . . . .	216
9.2.2 Effets d'échelle . . . . .	217
9.2.3 Propagation progressive ou propagation brutale . . . . .	217
9.3 Le trajet des fissures . . . . .	223
9.3.1 Le Principe de Symétrie Locale . . . . .	224
9.3.2 Le Critère du G-max . . . . .	227
9.3.3 Comparaison des deux critères . . . . .	228
9.4 Au delà de la théorie de Griffith . . . . .	229
9.4.1 Initialisation de la fissuration . . . . .	229
9.4.2 Fatigue . . . . .	232
<b>A Fiches de synthèse</b>	<b>235</b>
<b>B Formulaire</b>	<b>251</b>
B.1 Coordonnées cylindriques ou polaires . . . . .	252
B.2 Coordonnées sphériques . . . . .	254
<b>Notations</b>	<b>257</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>261</b>
<b>Index</b>	<b>263</b>





Première partie

Elasticité



# Chapitre 1

## Rappels de Mécanique des Milieux Continus

Ce chapitre ne fait que rappeler un certain nombre de notions introduites et développées dans les cours de deuxième année de Mécanique des Milieux Continus [22, 20], en particulier celles qui seront d'usage fréquent dans ce cours de Plasticité et Rupture. Il est évidemment hors de question de le faire de façon détaillée et il est indispensable de se reporter au cours de base dans tous les cas (inévitables) où le caractère allusif de ces rappels pourrait se révéler insuffisant.

*Nous nous placerons toujours en quasi-statique, ce qui veut dire que nous négligerons systématiquement les effets d'inertie en supposant que le système est en équilibre à chaque instant dans le référentiel envisagé. De plus nous nous placerons toujours dans le cadre des petites perturbations, ce qui conduit à négliger les changements de géométrie dans l'écriture des équations d'équilibre, à ne pas distinguer les différents tenseurs des contraintes et à linéariser les relations entre les déplacements et les déformations.*

### 1.1 Configurations, déplacements

Les notions de déplacements et de déformations servent à comparer deux configurations d'un milieu confiné : l'une est appelée *configuration de référence* et est, comme son nom l'indique, la configuration qui sert à repérer les points matériels ; l'autre appelée *configuration déformée* est celle réellement ou virtuellement occupée par le milieu au moment de l'étude.

Si on note  $\Omega$  le domaine occupé par le milieu dans sa configuration de référence — domaine que nous supposons *ouvert connexe* de  $\mathbb{R}^3$  — et si  $\varphi$  désigne la transformation faisant passer de la configuration de référence à la configuration déformée,  $\varphi(\underline{x})$  est la position dans la configuration déformée du point matériel repéré par sa position  $\underline{x}$  dans la configuration de référence<sup>1</sup>.

Le *vecteur déplacement*  $\underline{\xi}(\underline{x})$  de ce point matériel est donné par

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}) - \underline{x}.$$

---

1. Dans cette description lagrangienne, on identifie en général le point matériel avec sa position dans la configuration de référence. On parle ainsi, avec un abus de langage, du point matériel  $\underline{x}$ .

La famille des *déplacements rigides* joue un rôle particulièrement important en Mécanique. Elle correspond aux transformations qui conservent les distances, *i.e.* aux  $\underline{\varphi}$  telles que

$$\|\underline{\varphi}(\underline{x}) - \underline{\varphi}(\underline{x}')\| = \|\underline{x} - \underline{x}'\|, \quad \forall \underline{x}, \forall \underline{x}' \in \Omega.$$

En ne retenant que celles qui conservent en plus l'orientation de l'espace, un résultat fondamental (d'Algèbre et de Géométrie) permet de caractériser ces *isométries directes* comme la combinaison d'une translation et d'une rotation<sup>2</sup>. Par conséquent, les déplacements rigides sont les champs  $\underline{\xi}$  qui peuvent s'écrire

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{a} + (\underline{R} - \underline{I})\underline{x} \quad \text{avec} \quad \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \underline{R} \in \mathbb{M}^3 \quad \text{tel que} \quad \underline{R}^{-1}\underline{R} = \underline{I}, \quad \det \underline{R} = 1 \quad (1.1)$$

où  $\underline{I}$  désigne le tenseur identité d'ordre 2. Dans le cas des petits déplacements, la matrice de rotation est proche de l'identité et peut s'écrire en première approximation

$$\underline{R} \approx \underline{I} + \underline{W} \quad \text{avec} \quad \underline{W} + \underline{W}^T = \underline{0},$$

la matrice  $\underline{W}$  étant donc une matrice antisymétrique. On obtient ainsi la caractérisation suivante des

<b>Petits déplacements rigides</b>	$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{a} + \underline{\omega} \wedge \underline{x}, \quad \underline{a} \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{\omega} \in \mathbb{R}^3.$
------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## 1.2 Déformations

Les déformations que subit le milieu quand il passe de la configuration de référence à la configuration déformée, que ce soient les variations de longueur, de surface ou de volumes, peuvent s'exprimer à l'aide du *tenseur des déformations*  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  qui est lui-même obtenu à partir du tenseur *gradient de la transformation*  $\underline{\underline{F}}$ . Ce dernier est, comme son nom l'indique, le gradient de la transformation  $\underline{\varphi}$ , *i.e.*  $\underline{\underline{F}} = \underline{\nabla} \underline{\varphi}$ . Il est relié au gradient des déplacements par

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\nabla} \underline{\xi}.$$

En termes de composantes dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , on a :

$$F_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$$

avec  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  sinon. La base orthonormée  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_n)$  au point  $\underline{x}$  de la configuration de référence est transformée en  $(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_1, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_2, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_n)$  au point  $\underline{\varphi}(\underline{x})$  de la configuration déformée. Pour que  $(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_1, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_2, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_n)$  constitue une base, il faut et il suffit que  $\det \underline{\underline{F}} \neq 0$  ce qui revient physiquement à supposer que l'élément de volume au point  $\underline{x}$  est transformé en un élément de volume au point  $\underline{\varphi}(\underline{x})$ . Si l'on veut de plus que l'orientation soit conservée dans la transformation, il faut que  $\det \underline{\underline{F}} > 0$ . Cette condition, appelée *condition d'injectivité locale*, qui joue un rôle essentiel en transformations finies est automatiquement vérifiée en petites perturbations.

---

2. Ici intervient l'hypothèse de connexité de la configuration de référence. Dans le cas d'un milieu non connexe, *i.e.* fait de plusieurs "morceaux", il y a une translation et une rotation par composante connexe, *i.e.* par morceau.

Le tenseur des déformations, appelé tenseur des *déformations de Green-Lagrange*, est défini par

$$2\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} = \nabla \underline{\underline{\xi}} + (\nabla \underline{\underline{\xi}})^T + (\nabla \underline{\underline{\xi}})^T \cdot \nabla \underline{\underline{\xi}},$$

$\underline{\underline{A}}^T$  désignant le transposé de  $\underline{\underline{A}}$ . En termes de composantes, on a donc

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$$

avec la *convention de sommation* sur les indices répétés. Les déformations sont nulles en tout point du milieu si et seulement si le déplacement est un déplacement de corps rigide, *i.e.* de la forme (1.1).

On voit que la relation entre les déplacements et les déformations est *a priori* non linéaire en raison de la présence de termes quadratiques. Toutefois, dans le cas où les déplacements sont “petits” ainsi que leurs gradients, ce qui correspond à l’hypothèse des *petites perturbations*, on néglige les termes quadratiques dans l’expression des déformations pour obtenir l’expression linéarisée suivante (*expression que nous adopterons dans toute la suite du cours*)<sup>3</sup>

<b>Relations linéarisées entre déformations et déplacements</b>	$2\varepsilon_{ij}(\underline{\underline{\xi}}) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$
-----------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

On voit donc que dans sa version linéarisée, les déformations sont le champ de tenseurs symétriques correspondant à la partie symétrique du gradient du champ des déplacements. On peut vérifier que les déformations linéarisées sont nulles en tout point du milieu si et seulement si les déplacements sont des petits déplacements rigides au sens de la définition donnée au paragraphe précédent.

Les composantes de la diagonale du tenseur des déformations mesurent les variations relatives de longueur alors que les composantes hors diagonale mesurent les variations d’angle. La trace du tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  mesure la variation relative de volume.

On peut être amené dans certains problèmes à calculer d’abord les déformations et d’en déduire ensuite les déplacements. Se pose alors la question de savoir sous quelles conditions on peut effectivement remonter aux déplacements. En effet, si l’on considère un champ de tenseurs symétriques  $\underline{\underline{x}} \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}})$  arbitraire, il n’est pas en général un champ de déformations linéarisées, *i.e.* la partie symétrique du gradient d’un champ de vecteurs. Pour qu’il le soit, *il faut*<sup>4</sup> qu’il vérifie des conditions dites de compatibilité. Dans le cas d’un système de coordonnées cartésiennes, ces *conditions de compatibilité* s’écrivent

<b>Equations de compatibilité</b>	$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k},$
-----------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

les indices  $i, j, k, l$  allant de 1 à 3. Elles sont en fait au nombre de 6 dans le cas général 3D et se réduisent à une seule en 2D.

3. On notera  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}})$  les déformations associées au champ de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  car on est amené à envisager différents champs de déplacements et chacun d’eux conduit à des déformations différentes.

4. Ces conditions de compatibilité ne sont pas toujours *suffisantes* sauf si le domaine est *simplement connexe*.

### 1.3 Tenseur des contraintes et efforts intérieurs

Le *tenseur des contraintes*  $\underline{\underline{\sigma}}$  sert à représenter les efforts intérieurs en un point matériel d'un milieu continu. Précisément, la force surfacique  $\underline{T}$  qu'exerce la partie + sur la partie - au point  $\underline{x}$  à travers la "facette" de normale  $\underline{n}$  est donnée par le vecteur contrainte  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ , *i.e.* sous forme intrinsèque ou en termes de composantes

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}, \quad T_i = \sigma_{ij} n_j.$$

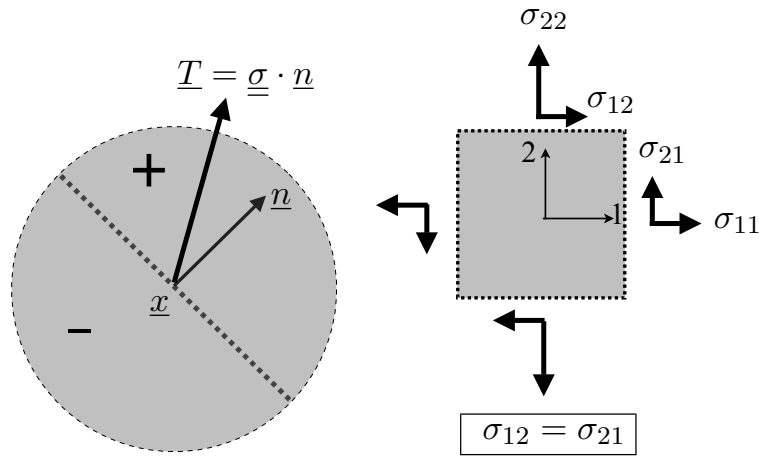


FIGURE 1.1 – Interprétation du tenseur des contraintes et de sa symétrie

On notera que le premier indice est relatif à la composante de la force surfacique alors que le deuxième est relatif à la composante de la normale. Le tenseur des contraintes est *symétrique* afin que le bilan du moment cinétique (en dynamique) ou l'équilibre des moments (en statique) soient automatiquement satisfaits une fois que le bilan de la quantité de mouvement ou l'équilibre des forces le sont,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad .$$

Par nature, les efforts intérieurs "vivent" dans la configuration déformée. Les "vraies" forces surfaciques intérieures  $\underline{T}$  sont des forces par unité de surface de la configuration déformée et la "vraie" normale  $\underline{n}$  est la normale unitaire à l'élément de surface de la configuration déformée. Le tenseur des contraintes correspondant  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des *contraintes de Cauchy*. Cependant, il est toujours possible de "transporter" les champs de vecteurs  $\underline{T}$  et  $\underline{n}$  sur la configuration de référence *via* la transformation  $\varphi$ . Ce faisant, on fait apparaître d'autres tenseurs de contraintes, dont en particulier le tenseur des *contraintes de Piola-Kirchhoff* [20]. Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations où nous nous plaçons, tous ces tenseurs sont confondus et nous parlerons donc désormais *du* tenseur des contraintes sans autre distinction.

## 1.4 Chargement et équilibre volumiques

Sous l'effet d'un chargement extérieur qui peut dépendre du temps, l'objet se déforme. Nous supposons qu'il est à chaque instant en équilibre dans sa configuration déformée ce qui revient à négliger les termes d'inertie. Théoriquement, les équations d'équilibre sont à écrire dans la configuration déformée  $\underline{\varphi}(\Omega)$  avec le chargement extérieur régnant dans cette configuration. Toutefois, dans le cadre des petites perturbations, les équations d'équilibre s'écrivent en identifiant la configuration déformée avec la configuration de référence, ce qui permet de "linéariser" ces équations qui deviennent

$$\boxed{\text{Equations d'équilibre linéarisées} \quad \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} \quad \text{dans} \quad \Omega}$$

où  $\operatorname{div} \underline{\sigma}$  désigne la divergence des contraintes calculée par rapport aux coordonnées des points matériels dans la configuration de référence et où  $\underline{f}$  représente les forces volumiques qui sont prises elles aussi dans la configuration de référence en négligeant la déformation. En termes de composantes, en adoptant la convention de sommation sur les indices répétés, ces équations s'écrivent

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(\underline{x}) + f_i(\underline{x}) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega.}$$

Par exemple, si le milieu continu est placé dans un champ de forces *massiques*  $\underline{g}$  fonction de la position, on prendra pour force volumique au point  $\underline{x}$  de la configuration de référence  $\rho \underline{g}(\underline{x})$  avec  $\rho$  masse volumique dans la configuration de référence et  $\underline{g}(\underline{x})$  la force massique existant au point  $\underline{x}$  (alors que le point matériel voit en fait  $\underline{g}(\underline{\varphi}(\underline{x}))$  et que sa masse volumique à l'équilibre dépend de la transformation  $\underline{\varphi}$ ).

## 1.5 Conditions de continuité aux interfaces

À l'interface entre deux matériaux, le tenseur de contraintes n'est pas en général défini. Plus exactement, on peut définir deux limites différentes  $\underline{\sigma}^+$  et  $\underline{\sigma}^-$  pour ce tenseur suivant que l'on approche le point de l'interface par l'un ou l'autre des deux matériaux. Toutefois une partie des composantes doivent être continues à la traversée pour des raisons d'équilibre. De façon précise, l'équilibre (ou encore le principe de l'action et de la réaction) impose que le vecteur contrainte soit continu :

$$\boxed{[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} := (\underline{\sigma}^+ - \underline{\sigma}^-) \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \text{sur une interface.}}$$

D'autre part, si l'on suppose que l'interface est parfaite, *i.e.* que les matériaux sont parfaitement collés, alors les déplacements doivent être continus, soit

$$\boxed{[\underline{\xi}] = \underline{0} \quad \text{sur une interface parfaite.}}$$

Toutefois, cette continuité des déplacements n'implique pas la continuité des déformations, mais seulement la continuité de certaines composantes du tenseur des déformations. En s'appuyant sur le fait que lorsqu'une fonction est continue à la traversée d'une surface, alors ses dérivées tangentielles le sont également, mais pas nécessairement les dérivées normales. Ainsi supposons que la normale à l'interface



au point  $\underline{x}$  soit  $\underline{e}_1$ , les composantes  $\sigma_{i1} = \sigma_{1i}$  du tenseur de contraintes seront continues alors que ce seront les composantes “complémentaires” du tenseur des déformations qui seront continues,

$$\text{Cas où } \underline{n} = \underline{e}_1 : \quad \llbracket \underline{\sigma} \rrbracket = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}, \quad \llbracket \underline{\varepsilon} \rrbracket = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.6 Conditions aux limites

Les **conditions aux limites** qui indiquent comment l’on agit sur les bords du domaine peuvent prendre des formes très variées. Rappelons les principales.

1. On contrôle les déplacements d’un point  $\underline{x}$  de la frontière  $\partial\Omega$  du domaine, ce qui exige en général d’y appliquer des forces surfaciques mais ces réactions sont a priori inconnues et ne seront connues qu’une fois le problème de statique sera entièrement résolu. On écrit

$$\text{Conditions aux limites de type Dirichlet en } \underline{x} \in \partial\Omega : \quad \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\xi}^d(\underline{x})$$

où  $\underline{\xi}^d$  désigne le déplacement imposé.

2. On peut au contraire imposer les forces surfaciques sur un point de la frontière, ce qui s’accompagnera en général de déplacements des points de cette frontière qui sont a priori inconnus et ne seront connus qu’une fois le problème de statique sera entièrement résolu. On écrit <sup>5</sup>

$$\text{Conditions aux limites de type Neumann en } \underline{x} \in \partial\Omega : \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x})$$

où  $\underline{T}$  désigne la force surfacique imposée.

3. **Conditions aux limites mixtes de type contact bilatéral sans frottement.** On interdit le déplacement normal tout en laissant libre les déplacements tangentiels d’un point  $\underline{x}$  de la frontière  $\partial\Omega$  du domaine. Les conditions aux limites sont donc de type mixte, la composante normale du déplacement et les composantes tangentielles du vecteur contrainte sont nulles. On écrit

$$\text{Conditions aux limites mixtes en } \underline{x} \in \partial\Omega : \quad \underline{\xi}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0, \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \sigma_{nn}\underline{n}.$$

Par exemple, si le vecteur normal correspond à la direction  $i$ , *i.e.* si  $\underline{n} = \underline{e}_i$ , on écrira

$$\xi_i = 0, \quad \sigma_{ji} = 0, \quad \forall j \neq i.$$

---

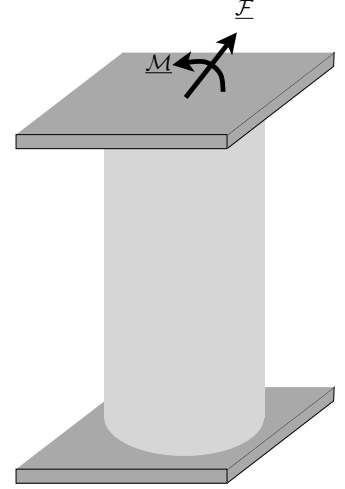
5. Ici encore, le fait d’identifier la configuration déformée avec la configuration de référence permet de simplifier l’écriture de ces conditions. On a ainsi à faire en général avec des *charges mortes*, *i.e.* des forces indépendantes de la déformation du milieu. En transformations finies, les forces de pression dues à un fluide s’écrivent  $\underline{T} = -p\underline{n}$  où  $\underline{n}$  est la normale extérieure à la configuration déformée et  $p$  est la pression du fluide (qui peut dépendre de la déformation de la structure), ce sont des forces dites *vives*. Par contre, en négligeant les changements de géométrie,  $p$  devient une donnée externe et  $\underline{n}$  est la normale extérieure à la configuration de référence.

On peut rencontrer des conditions aux limites plus générales qui peuvent être *non locales*, *i.e.* où la donnée en force ou en déplacement ne porte pas sur un point de la frontière, mais sur une partie de cette frontière. C'est par exemple le cas lorsque le solide déformable est attaché à un solide rigide qui est lui-même soumis à un système de forces, exemple qui fait l'objet de l'exercice suivant.

**Exercice 1.1. Les conditions aux limites dans l'essai sur éprouvette à force contrôlée.**

On considère une éprouvette cylindrique  $\Omega = S \times (0, L)$  de hauteur  $L$  et de section  $S$ . La base  $S_0 = S \times \{0\}$  de l'éprouvette est attachée à un support rigide fixe alors que le sommet  $S_L = S \times \{L\}$  est fixé au plateau rigide mais mobile d'une presse. L'opérateur exerce sur le plateau un système d'efforts dont la résultante est  $\underline{F}$  et dont le moment résultant au centre géométrique  $\underline{x}_L$  de  $S_L$  est  $\underline{M}$ . La surface latérale de l'éprouvette est libre.

Ecrire les conditions aux limites et les comparer à celles que l'on écrirait si l'opérateur contrôlait le déplacement du plateau de la presse.



CORRIGÉ. Sur la base, ce sont des conditions de Dirichlet :  $\underline{\xi} = \underline{0}$  sur  $S_0$ . Sur la surface latérale, ce sont des conditions de Neumann :  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0}$  sur  $\partial S \times (0, L)$ . Il reste à écrire les conditions aux limites sur  $S_L$ .

Comme le plateau de la presse est rigide, son champ de (petits) déplacements s'écrit  $\underline{a} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_L)$  où le vecteur translation  $\underline{a}$  (qui représente le déplacement du centre du plateau) et le vecteur rotation  $\underline{\omega}$  sont *inconnus*. Comme le sommet de l'éprouvette est attaché au plateau, il subit le même déplacement que celui-ci et on doit donc écrire la condition à la limite cinématique suivante :

$$\exists \underline{a} \in \mathbb{R}^3, \exists \underline{\omega} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tels que} \quad \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{a} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_L) \quad \text{sur} \quad S_L. \quad (1.2)$$

On voit que ce ne sont pas exactement des conditions aux limites de type Dirichlet puisque la translation et la rotation ne sont pas données. Elles ne seront déterminées qu'une fois le problème d'élastostatique résolu et elles seront fonctions des propriétés élastiques du ou des matériaux constitutifs de l'éprouvette. Notons aussi qu'elles ont un caractère global puisqu'elles lient les déplacements de *tous* les points de  $S_L$ .

Ecrivons maintenant que le plateau est en équilibre. Il est soumis d'une part au système d'efforts imposé par l'opérateur et d'autre part à la réaction de l'éprouvette à laquelle il est attaché. En un point  $\underline{x}$  de  $S_L$ , l'éprouvette exerce sur le plateau la force surfacique  $-\underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_3$ , le signe  $-$  provenant du fait que la normale sortante au plateau est  $-\underline{e}_3$ . D'après le principe fondamental de la statique, la résultante et le moment résultant au centre  $\underline{x}_L$  de la section  $S_L$  des efforts extérieurs sur le plateau doivent être nuls, ce qui s'écrit

$$\int_{S_L} \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_3 dS = \underline{F}, \quad \int_{S_L} (\underline{x} - \underline{x}_L) \wedge \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_3 dS = \underline{M}. \quad (1.3)$$

On voit que ce sont des conditions intégrales que doit satisfaire le champ des contraintes.

En résumé, lorsque l'opérateur *contrôle les efforts exercés sur le plateau de la presse*, les conditions aux limites à écrire sur  $S_L$  sont (1.2) et (1.3).

Par contre si l'opérateur *contrôle le déplacement du plateau*, alors les conditions aux limites s'écrivent

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{a} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_L) \quad \text{sur} \quad S_L,$$

la translation  $\underline{a}$  et la rotation  $\underline{\omega}$  étant dans ce cas *données*. On est dans la situation de conditions aux limites de Dirichlet. La force  $\underline{F}$  et le moment  $\underline{M}$  qui seront nécessaires pour obtenir ce déplacement du plateau sont

alors *inconnus* et n'apparaissent pas dans les conditions aux limites. Ils seront déterminés une fois le problème d'élastostatique résolu et ils seront fonctions des propriétés élastiques du ou des matériaux constitutifs de l'éprouvette.  $\square$

# Chapitre 2

## Elastostatique

### 2.1 Le comportement élastique

On dit que le matériau constitutif a un *comportement élastique* lorsque la connaissance des déformations (actuelles) suffisent à déterminer les contraintes (actuelles). Ce comportement se caractérise par la *réversibilité* de la réponse : lorsqu'on supprime la sollicitation, le matériau revient dans sa configuration originale. Suivant que la relation contrainte-déformation est linéaire ou pas, on parle d'élasticité linéaire ou non linéaire.

#### 2.1.1 Elasticité linéaire sans précontraintes

En élasticité linéaire, *en l'absence de précontraintes*, la relation contrainte-déformation prend la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

$\underline{\underline{C}}$  étant le *tenseur de rigidité*. On suppose que  $\underline{\underline{C}}$  possède les symétries suivantes appelées petites et grandes symétries,

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}}.$$

Les grandes symétries (permutation de  $ij$  et  $kl$ ) assurent l'existence d'un *potentiel élastique* dont dérive la relation contrainte-déformation,

$$\boxed{W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}})}.$$

Ce potentiel est aussi l'énergie élastique que possède l'élément de volume dans son état de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Pour des raisons de stabilité, on suppose que cette énergie est positive, *i.e.*

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{M}_s^3, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \neq \underline{\underline{0}}.$$

La relation contrainte-déformation est alors inversible, les déformations s'écrivant en fonction des contraintes à l'aide du *tenseur de souplesse*,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}},$$

le tenseur de souplesse possédant les mêmes propriétés de symétrie et de positivité que le tenseur de rigidité. L'énergie élastique peut aussi s'exprimer en termes des contraintes via le *potentiel élastique dual*

$$W^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial W^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\sigma}).$$

Lorsque le matériau ne possède aucune propriété d'invariance par symétrie, les tenseurs de souplesse ou de rigidité possèdent 21 coefficients indépendants.

### Les relations contrainte-déformation pour un matériau isotrope

Dans le cas d'un *matériau isotrope*, le nombre de coefficients se réduit à deux. Le potentiel élastique s'écrit alors

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

où apparaît les *coefficients de Lamé*  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\mu$  étant le module de cisaillement. Ces deux modules ont la dimension d'une pression (unité= MPa). Pour que les conditions de positivité soient satisfaites, il faut et il suffit que les coefficients de Lamé satisfassent les inégalités (strictes) suivantes

$$\boxed{3\lambda + 2\mu > 0}, \quad \boxed{\mu > 0}.$$

Pour établir ces inégalités, on décompose le tenseur des déformations en partie sphérique et partie déviatorique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^D, \quad \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^D = 0.$$

Le potentiel élastique s'écrit alors

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} (\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}}^D : \underline{\underline{\varepsilon}}^D$$

et sa positivité est équivalente aux deux inégalités mentionnées ci-dessus.

Finalement, la relation contrainte-déformation s'écrit

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}}.$$

La relation inverse fait apparaître le *module d'Young*  $E$  et le *coefficient de Poisson*  $\nu$ . Elle s'écrit

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr } \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}}.$$

Autrement dit, le potentiel élastique dual est donné par

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = -\frac{\nu}{2E} (\text{Tr } \underline{\underline{\sigma}})^2 + \frac{1+\nu}{2E} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}.$$

Sa positivité se traduit par les inégalités suivantes en termes du module d'Young et du coefficient de Poisson :

$$\boxed{E > 0}, \quad \boxed{-1 < \nu < \frac{1}{2}},$$

le cas limite  $\nu = \frac{1}{2}$  correspondant à un matériau incompressible (qui ne peut pas changer de volume).

## Les relations entre les coefficients d'élasticité

En identifiant les deux relations contrainte-déformation introduites, on obtient les relations entre les quatre coefficients d'élasticité

$$\boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}, \quad \boxed{2\mu = \frac{E}{1 + \nu}},$$

$$\boxed{E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}}, \quad \boxed{2\nu = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}}.$$

## Interprétation des coefficients d'élasticité

Si l'on soumet l'élément de volume d'un matériau élastique isotrope à un essai de *traction simple* dans la direction  $\underline{e}_1$ , le tenseur des contraintes est de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, \quad \sigma > 0.$$

Le tenseur des déformations sera donc donné par

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu\sigma}{E} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3).$$

Autrement dit, la variation relative de longueur dans la direction 1 est égale à  $\sigma/E$ , ce qui fournit l'interprétation du module d'Young, alors que le rapport entre les variations relatives de longueur dans les directions 2 et 3 par rapport à la direction 1 sont égales à  $-\nu$ , ce qui fournit l'interprétation du coefficient de Poisson. L'élément de volume va s'allonger dans la direction 1, alors que, si  $\nu > 0$ , il va se contracter dans les deux autres directions.

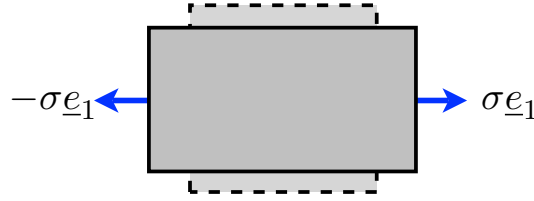


FIGURE 2.1 – Déformation de l'élément de volume dans un essai de traction simple

Si l'on soumet l'élément de volume d'un matériau élastique isotrope à un essai de *cisaillement simple*, le tenseur des contraintes est de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1), \quad \tau > 0.$$

Le tenseur des déformations sera donc donné par

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\tau}{2\mu} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1).$$

Autrement dit, l'élément de volume subira une distorsion, sans variation de longueur des directions 1 et 2, mais seulement une variation de leur angle relatif d'autant plus forte que  $\mu$  est petit. Ceci fournit une interprétation du module de cisaillement.

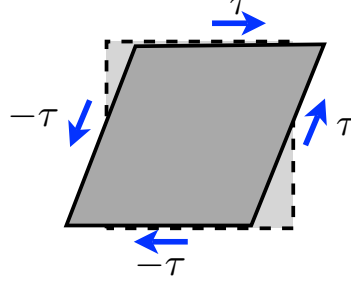


FIGURE 2.2 – Déformation de l'élément de volume dans un essai de cisaillement simple

Si l'on soumet l'élément de volume d'un matériau élastique isotrope à un essai de *traction sphérique*, le tenseur des contraintes est de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{I}}, \quad \sigma > 0.$$

Le tenseur des déformations sera donc donné par

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{3\lambda + 2\mu} \underline{\underline{I}}.$$

Autrement dit, l'élément de volume subit une dilatation uniforme dans toutes les directions inversement proportionnelle au coefficient de compressibilité  $3\lambda + 2\mu$ .

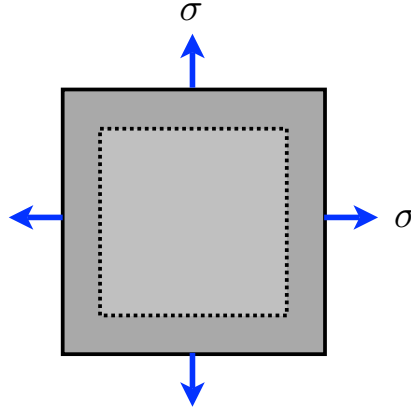


FIGURE 2.3 – Déformation de l'élément de volume dans un essai de traction sphérique

### 2.1.2 Elasticité linéaire avec précontraintes

En présence de *précontraintes*, la relation contrainte-déformation devient

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  désigne le *tenseur des précontraintes*. Ce sont les contraintes qui règnent dans le matériau dans sa configuration de référence. Si on veut ramener les contraintes à 0, il faut déformer le matériau avec des déformations valant  $-\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^0$ . Le potentiel élastique et le potentiel élastique dual prennent alors les formes suivantes :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

et

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0),$$

la constante arbitraire ayant été fixée de façon à ce que le potentiel élastique soit nul dans la configuration de référence.

La prise en compte de précontraintes est nécessaire en thermo-mécanique du fait de la dilatation thermique. Si l'on choisit comme configuration de référence d'un matériau *isotrope* celle où il est à la température  $T_0$  en l'absence de contraintes, alors pour le maintenir dans cette configuration lorsqu'on le soumet à une température  $T$  il faudra lui appliquer des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  données par

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = -(3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}}$$

où  $\alpha$  est le *coefficient de dilatation thermique* et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Inversement, si on le laisse libre de contraintes tout en modifiant sa température, alors il subira une déformation dite *déformation thermique*  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$  donnée par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}}.$$

De façon générale, la relation contrainte-déformation en **thermoélasticité linéaire isotrope** s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}},$$

et le potentiel élastique associé est

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

**Remarque.** On peut envisager des comportements élastiques non linéaires tout en restant dans le cadre des petites perturbations. On parle alors de matériau hyperélastique dont le comportement est défini par le potentiel élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}} \mapsto W(\underline{\underline{\varepsilon}})$ , i.e.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}(\underline{\underline{\varepsilon}}).$$

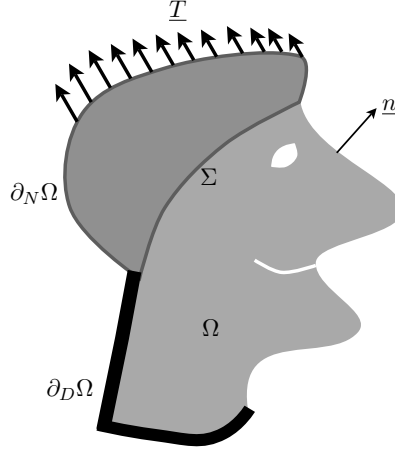
La plupart des propriétés que nous allons établir restent vraies dans ce cadre élargi (hormis tout ce qui a trait à la linéarité) à condition que  $W$  soit une fonction strictement convexe avec une croissance à l'infini "suffisante" (condition dite de coercivité), cf [2]. Le potentiel élastique dual s'obtient par une transformation de Legendre :

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup_{\underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{M}_s^3} \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - W(\underline{\underline{\varepsilon}}) \}.$$



## 2.2 Le problème aux limites

### 2.2.1 Formulation d'un problème-type



Pour une structure tridimensionnelle constituée d'un ou de plusieurs matériaux élastiques le problème linéarisé de l'équilibre est un problème aux limites où l'on rajoute simplement la relation de comportement au système constitué des équations d'équilibre et des conditions aux limites linéarisées. Dans le cas du problème-type où la partie du bord  $\partial_D \Omega$  est à déplacement contrôlé et la partie complémentaire du bord  $\partial_N \Omega$  est à force contrôlée, le problème d'élastostatique se formule comme suit

- **Problème-type d'élastostatique linéarisé**

— *Données :*

$\Omega$  : configuration de référence,  $\Sigma$  : interfaces,  $\underline{f}$  : forces volumiques,  $\underline{\sigma}^0$  : précontraintes

$\partial_D \Omega$  : partie du bord où les déplacements sont imposés,  $\underline{\xi}^d$  : déplacement imposé

$\partial_N \Omega$  : partie du bord où les forces sont imposées,  $\underline{T}$  : force surfacique imposée

— *Inconnues :*

$\underline{\xi}$  : champ des déplacements,  $\underline{\sigma}$  : champ des contraintes,  $\underline{\varepsilon}$  : champ des déformations

— *Equations :*

$$\text{équilibre volumique} \quad : \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma$$

$$\text{conditions aux limites} \quad : \quad \xi_i = \xi_i^d \text{ sur } \partial_D \Omega, \quad \sigma_{ij} n_j = T_i \text{ sur } \partial_N \Omega = \partial \Omega \setminus \partial_D \Omega$$

$$\text{conditions de continuité} \quad : \quad \llbracket \xi_i \rrbracket = 0, \quad \llbracket \sigma_{ij} \rrbracket n_j = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

$$\text{compatibilité} \quad : \quad 2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma$$

$$\text{comportement élastique} \quad : \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma$$

C'est ce problème-type qui nous servira de fil conducteur pour présenter toute l'approche variationnelle dans le chapitre suivant. Il n'est évidemment pas le plus général, puisqu'on peut imaginer des conditions aux limites bien différentes.

**Remarque.** Dans le cas d'un milieu homogène isotrope sans précontrainte, en injectant la relation de comportement dans les équations d'équilibre, on obtient les équations de Navier à vérifier en tout point intérieur du domaine (hors les interfaces) :

$$(\lambda + \mu) \underline{\text{grad}} \underline{\text{div}} \underline{\xi} + \mu \Delta \underline{\xi} + \underline{f} = \underline{0}.$$

C'est un système d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre en  $\underline{\xi}$ .

### 2.2.2 Problèmes réduits par symétrie

Lorsque la géométrie de la structure, le chargement et le(s) matériau(x) constitutifs possèdent suffisamment de symétries, le problème d'élastostatique peut être réduit à un problème plus simple posé sur un domaine de taille voire de dimension inférieures. On rappelle ci-dessous les principales familles de problèmes réduits dans le cas de *matériaux élastiques isotropes sans précontrainte*.

#### Déformations planes

Ce sont des problèmes initialement posés sur un domaine cylindrique  $\Omega = S \times I$  où la section  $S$  est ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$  et l'axe  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Les symétries font que le champ de déplacement à l'équilibre est de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_1(x_1, x_2) \underline{e}_1 + \xi_2(x_1, x_2) \underline{e}_2, \quad (x_1, x_2) \in S.$$

Seules les composantes  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{21}$  et  $\varepsilon_{22}$  du tenseur des déformations sont non nulles et ne dépendent que de  $(x_1, x_2)$ , d'où le nom de déformations planes. En vertu du comportement isotrope du matériau, les composantes  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{32}$  sont nulles. Par contre, du fait du coefficient de Poisson,  $\sigma_{33}$  n'est en général pas nulle et est reliée à  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  par

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Les équations d'équilibre volumiques se réduisent à

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \end{cases},$$

$f_1$  et  $f_2$  devant être indépendantes de  $x_3$  et  $f_3$  devant être nulle. Il ne reste plus qu'une équation de compatibilité à satisfaire qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Dans le cas particulier où les forces volumiques sont nulles ( $f_1 = f_2 = 0$ ), les équations d'équilibre sont localement satisfaites si (et seulement si) les contraintes se déduisent d'une *fonction d'Airy*  $\Psi$  :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{33} = \nu \Delta \Psi.$$

Lorsque le milieu est homogène, l'équation de compatibilité se réduit alors à  $\Delta^2 \Psi = 0$ .

### Déformations antiplanes

Ce sont des problèmes initialement posés sur un domaine cylindrique  $\Omega = S \times I$  où la section  $S$  est ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$  et l'axe  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Les symétries font que le champ de déplacement à l'équilibre est de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_3(x_1, x_2) \underline{e}_3, \quad (x_1, x_2) \in S.$$

Seules les composantes  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$  et  $\varepsilon_{32}$  du tenseur des déformations sont non nulles et ne dépendent que de  $(x_1, x_2)$ , d'où le nom de déformations antiplanes. Elles sont reliées aux déplacements par

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}.$$

En vertu du comportement isotrope du matériau, seules les composantes  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{32}$  sont non nulles. Les *équations d'équilibre volumiques* se réduisent à

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + f_3 = 0,$$

$f_1$  et  $f_2$  devant être nulles et  $f_3$  devant être indépendante de  $x_3$ . Dans le cas d'un milieu homogène, cette équation d'équilibre écrite en terme des déplacements s'écrit

$$\mu \Delta \xi_3 + f_3 = 0 \quad \text{dans } S.$$

Les équations de compatibilité sont automatiquement satisfaites.

### 2.2.3 Quelques problèmes classiques et leurs solutions

#### Essai de traction à force contrôlée d'une éprouvette cylindrique

On exerce sur les deux sections extrêmes  $S \times \{0\}$  et  $S \times \{L\}$  d'une éprouvette cylindrique des forces surfaciques normales de densité uniforme  $\sigma > 0$  alors que la surface latérale est libre. Les forces volumiques sont négligées. Le matériau constitutif est linéairement élastique isotrope, sans précontrainte. On a donc à faire ici avec des conditions aux limites de type Neumann sur toute la frontière :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3 = \sigma \underline{e}_3 \quad \text{sur } S \times \{0, L\}, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \text{sur } \partial S \times (0, L).$$

Les champs de déplacements et de contraintes suivants

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = -\frac{\nu \sigma}{E} (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) + \frac{\sigma}{E} x_3 \underline{e}_3, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

sont solutions du problème aux limites. Vérifions-le.

1. Le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  étant uniforme, il vérifie automatiquement l'équation d'équilibre volumique  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$  dans  $\bar{S} \times (0, L)$ .
2. Les conditions aux limites sur les sections extrêmes sont bien satisfaites. Sur la surface latérale, comme l'éprouvette est cylindrique, la normale sortante  $\underline{n}$  est orthogonale à  $\underline{e}_3$  et donc la condition à la limite est bien satisfaite.
3. Le champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  associé au champ de déplacement  $\underline{\xi}$  s'écrit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = -\frac{\nu\sigma}{E}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \frac{\sigma}{E}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3.$$

Il est donc uniforme et se déduit du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  par la relation d'élasticité

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr } \underline{\underline{\sigma}} \underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}},$$

ce qui achève la vérification.

Notons que si l'on ajoute à  $\underline{\xi}$  un (petit) déplacement de corps rigide quelconque  $\underline{a} + \underline{\omega} \wedge \underline{x}$ , avec  $\underline{a}$  et  $\underline{\omega}$  arbitraires dans  $\mathbb{R}^3$ , le déplacement obtenu est encore solution. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, ce résultat de non unicité des déplacements est dû au fait qu'il n'y a aucune condition à la limite cinématique. On notera aussi que la solution est la même quelle que soit la forme de la section du cylindre.

### Essai de torsion d'un arbre cylindrique à section circulaire

On considère une éprouvette cylindrique de hauteur  $L$ , à section circulaire de rayon  $R$ . On choisit le repère de façon à ce que la configuration de référence naturelle soit

$$\Omega = S \times (0, L) \quad \text{avec} \quad S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}.$$

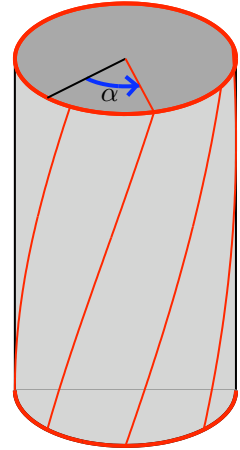
La base  $S \times \{0\}$  est fixée, alors que l'on impose au sommet  $S \times \{L\}$  une rotation d'ensemble autour de l'axe  $\underline{e}_3$  d'un angle  $\alpha$ . La surface latérale est libre et les forces volumiques sont négligées. Par conséquent les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{0} & \text{sur } S \times \{0\} \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \alpha \underline{e}_3 \wedge \underline{x} & \text{sur } S \times \{L\} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} & \text{sur } \partial S \times (0, L) \end{cases}.$$

Le champ de déplacement solution est donné par

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \alpha \frac{x_3}{L} \underline{e}_3 \wedge \underline{x}$$

et correspond donc à une rotation d'ensemble de chaque section autour de l'axe  $\underline{e}_3$  d'un angle qui varie linéairement avec la cote  $x_3$  de la section. Vérifions qu'il est bien solution.



1. Le champ  $\underline{\xi}$  vérifie les conditions aux limites à la base et au sommet.
2. Le champ des déformations associé s'écrit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{\alpha}{2L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, comme sa trace est nulle, le champ des contraintes fourni par la relation d'élasticité est

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \frac{\mu\alpha}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Les équations d'équilibre volumique  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$  sont donc bien vérifiées partout dans  $\Omega$ .
4. Comme l'éprouvette est cylindrique et la section est circulaire, la normale unitaire sortante en un point  $\underline{x}$  de la surface latérale s'écrit

$$\underline{n}(\underline{x}) = \frac{x_1}{R} \underline{e}_1 + \frac{x_2}{R} \underline{e}_2.$$

Par conséquent la condition à la limite  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0}$  y est vérifiée, ce qui achève la vérification.

Notons qu'il est essentiel que la section soit circulaire pour que le champ des déplacements ait cette forme simple.

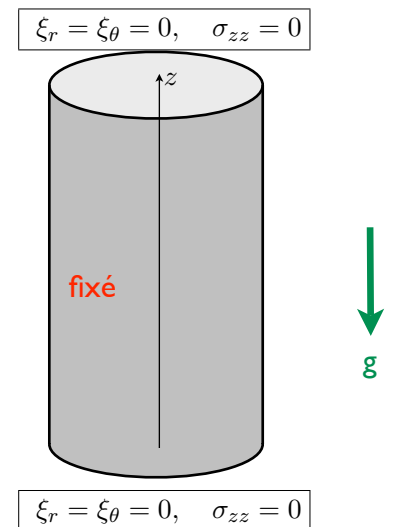
### Cylindre circulaire pesant dont la surface latérale est fixée

On considère l'éprouvette cylindrique de hauteur  $L$ , à section circulaire de rayon  $R$ , *i.e.*  $\Omega = S \times (0, L)$  avec

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\},$$

placée dans le champ de pesanteur vertical uniforme  $-g\underline{e}_3$ . La surface latérale est fixée à un support rigide. Les déplacements horizontaux de la base  $S \times \{0\}$  et du sommet  $S \times \{L\}$  sont interdits, alors que leurs déplacements verticaux sont libres. Autrement dit, en utilisant le système de coordonnées cylindriques, les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} \xi_r(\underline{x}) = \xi_\theta(\underline{x}) = \xi_z(\underline{x}) = 0 & \text{sur } \partial S \times (0, L) \\ \xi_r(\underline{x}) = \xi_\theta(\underline{x}) = 0, \quad \sigma_{zz}(\underline{x}) = 0 & \text{sur } S \times \{0, L\} \end{cases}.$$



Le matériau constitutif étant supposé linéairement élastique isotrope, c'est un exemple de problème de déformation anti-plane. Le champ de déplacement solution s'écrit

$$\underline{\xi}(x) = -\frac{\rho g}{4\mu}(R^2 - r^2)\underline{e}_z$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau. Vérifions qu'il est bien solution.

1. Il vérifie la condition de fixation en  $r = R$  et les conditions aux limites cinématiques en  $z = 0$  et  $z = L$  ;
2. Le champ des contraintes associé par la loi d'élasticité a pour seules composantes cylindriques non nulles

$$\sigma_{rz}(r) = \sigma_{zr}(r) = \frac{1}{2}\rho g r$$

et vérifie donc la condition à la limite en  $z = 0$  et  $z = L$  ;

3. La seule équation d'équilibre volumique non triviale est celle projetée sur la verticale. Comme elle s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} - \rho g = 0,$$

on vérifie immédiatement qu'elle est satisfaite, ce qui achève la vérification.

**Remarque.** On peut rapidement retrouver la solution en partant de l'équation d'équilibre vertical qui pour un problème de déformation antiplane se réduit à  $\mu\Delta\xi_z - \rho g = 0$ . De plus du fait de l'axisymétrie  $\xi_z$  ne dépend que de  $r$ . Comme il doit s'annuler en  $r = R$  et doit être régulier en  $r = 0$ , on obtient le résultat à partir de l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

## Cylindre creux sous pression externe en déformations planes

On considère un cylindre creux de hauteur  $L$  dont la section est la couronne circulaire de rayon intérieur  $a$  et extérieur  $b$  :

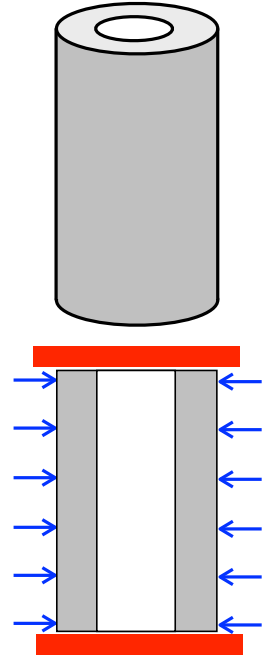
$$\Omega = S \times (0, L)$$

avec

$$S = \{(x_1, x_2) : a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2\}.$$

Sa paroi interne  $r = a$  est libre alors que sa paroi externe  $r = b$  est soumise à la pression uniforme  $p$  d'un fluide. La base et le sommet sont en contact sans frottement avec des supports rigides fixes qui interdisent donc tout déplacement normal, mais laissent libres tout déplacement tangentiel. En utilisant un système de coordonnées cylindriques, les conditions aux limites s'écrivent donc

$$\begin{cases} \xi_z = 0, & \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 & \text{en } z = 0 \text{ et } z = L \\ \sigma_{rr} = -p, & \sigma_{\theta r} = \sigma_{zr} = 0 & \text{en } r = b \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{zr} = 0 & & \text{en } r = a \end{cases}.$$



Le cylindre étant homogène et constitué d'un matériau linéairement élastique isotrope, c'est un problème de déformations planes. De plus, du fait de l'axisymétrie, le champ des déplacements est de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = u(r)\underline{e}_r.$$

L'expression de  $u(r)$  s'obtient à partir des équations d'équilibre et des conditions aux limites en  $r = a$  et  $r = b$ . Après calcul (laissé à titre d'exercice), on obtient

$$u(r) = -\frac{p}{2\mu} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} r + \frac{a^2}{r} \right).$$

On en déduit que les seules composantes cylindriques non nulles des contraintes sont

$$\sigma_{rr}(r) = -\frac{b^2(r^2 - a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} p, \quad \sigma_{\theta\theta}(r) = -\frac{b^2(r^2 + a^2)}{r^2(b^2 - a^2)} p, \quad \sigma_{zz} = -\frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{\lambda p}{\lambda + \mu}.$$

**Remarque.** Dans le cas d'un cylindre plein, la solution est donnée par

$$u(r) = -\frac{p r}{2(\lambda + \mu)}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -p, \quad \sigma_{zz} = -\frac{\lambda p}{\lambda + \mu},$$

les contraintes dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  sont donc uniformes et sphériques, ce qui n'est manifestement pas vrai pour le cylindre creux. Le fait que le cylindre soit creux modifie sensiblement le champ des contraintes et ce même si le rayon interne  $a$  est petit. En effet,  $|\sigma_{\theta\theta}(r)|$  est maximal en  $r = a$  où il vaut  $2pb^2/(b^2 - a^2)$ . Par conséquent, si  $a$  est petit devant  $b$ , la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est pratiquement deux fois plus forte (en valeur absolue) près du centre du fait que le cylindre soit creux. Ceci est un exemple de concentration de contrainte dû à une cavité.

## Chapitre 3

# Approche variationnelle

### 3.1 Propriétés variationnelles du problème-type

En dehors de situations très particulières, le problème aux limites n'est pas résoluble analytiquement. Il faut donc avoir recours à des méthodes d'approximation. La plus répandue d'entre elles, la Méthode des Eléments Finis, s'appuie sur une écriture différente, dite *variationnelle*, du problème d'élastostatique. Il s'avère que cette nouvelle formulation présente aussi des avantages tant du point de vue mathématique que physique. Basée sur les notions d'énergie et de travail, elle permet d'obtenir des propriétés qualitatives sur la solution qui sont beaucoup plus difficiles à mettre en évidence sur le problème aux limites. De plus, un certain nombre de concepts en Mécanique de la Rupture sont intimement liés à ce point de vue énergétique. Toutes ces raisons font qu'il est absolument nécessaire d'étudier et d'assimiler ces notions. Nous les abordons dans cette section dans le cadre de l'élasticité linéaire avec le point de vue du mécanicien. Il est recommandé d'aller consulter aussi les ouvrages de mathématiques appliquées [7, 2] qui offrent un éclairage complémentaire.

#### 3.1.1 Déplacements et contraintes admissibles

Partons des équations d'équilibre linéarisées avec le système de conditions aux limites correspondant au problème-type présenté dans le chapitre précédent. Un champ de déplacement est dit *cinématiquement admissible* s'il est suffisamment régulier<sup>1</sup> et s'il vérifie les conditions aux limites de Dirichlet sur  $\partial_D\Omega$ . L'ensemble de tels champs est noté  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{C} = \{ \underline{\xi}^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Sigma, \quad \underline{\xi}^* = \underline{\xi}^d \text{ sur } \partial_D\Omega \}, \quad (3.1)$$

---

1. La régularité requise est étroitement liée au comportement du matériau constitutif. La règle empirique que l'on peut adopter est que les champs doivent être suffisamment réguliers pour que l'on puisse définir l'énergie totale du système ou de façon générale toutes les quantités physiques globales. On doit donc fonctionner au cas par cas et définir la régularité pour chaque famille de comportement. Ainsi, ce n'est pas la même en élasticité linéaire qu'en élasticité non linéaire, en élasticité qu'en plasticité, en plasticité parfaite qu'en plasticité avec écrouissage. Dans le cas de l'élasticité linéaire, la finitude de l'énergie élastique exige que le champ de déformation soit de carré intégrable. Cela suffit en général pour que l'énergie potentielle soit également finie.



c'est une espace *vectoriel* si les données  $\underline{\xi}^d$  sont nulles, un espace *affine* sinon dont l'espace vectoriel associé  $\mathcal{C}_0$ <sup>2</sup> est

$$\mathcal{C}_0 = \{ \underline{\xi}^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Sigma, \quad \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } \partial_D \Omega \}. \quad (3.2)$$

Un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ <sup>3</sup> est dit *statiquement admissible* s'il est suffisamment régulier (avec la même remarque à ce sujet que pour les déplacements) et s'il vérifie à la fois les équations d'équilibre volumiques, les conditions aux limites de Neumann sur  $\partial_N \Omega$  et les conditions de continuité du vecteur contrainte aux interfaces. L'ensemble de tels champs est noté  $\mathcal{S}$ ,

$$\mathcal{S} = \{ \underline{\underline{\sigma}}^* : \Omega \rightarrow \mathbb{M}_s^3, \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{f} = \underline{0} \text{ dans } \Omega \setminus \Sigma, \quad \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^* \rrbracket \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Sigma, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T} \text{ sur } \partial_N \Omega \} \quad (3.3)$$

où  $\mathbb{M}_s^3$  désigne l'espace vectoriel des tenseurs  $3 \times 3$  symétriques.

**Remarque.** Avec ces définitions, on voit que le problème d'élastostatique se ramène à

$$\text{Trouver } \underline{\xi} \in \mathcal{C} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S} \text{ tels que } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}).$$

Autrement dit, il s'agit de trouver un champ de déplacements cinématiquement admissible et un champ de contraintes statiquement admissible reliés par la loi de comportement d'élasticité.

### 3.1.2 La formulation variationnelle de l'équilibre

Les champs de contraintes statiquement admissibles peuvent être caractérisés à l'aide des notions de travaux (ou puissances) virtuel(le)s plutôt qu'à partir des bilans de force. Cette vision, dite formulation variationnelle de l'équilibre et qui est une version du Principe des Puissances Virtuelles, joue un rôle essentiel tant du point théorique que numérique. On rappelle le résultat fondamental suivant auquel nous nous référerons par la suite comme étant le PPV :

**Le PPV.** Un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  est statiquement admissible si et seulement si, pour tout déplacement virtuel  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$ , le travail de  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  dans les déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*)$  associées à  $\underline{\xi}^*$  est égal au travail des efforts extérieurs donnés dans  $\underline{\xi}^*$ , i.e.

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\xi}^* \, d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^* \, dS, \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0 \quad (3.4)$$

Dans le cas des conditions aux limites envisagées ici, on voit que le travail des efforts extérieurs donnés dans un déplacement admissible  $\underline{\xi}^*$  est simplement la somme du travail des forces volumiques  $\underline{f}$  et du travail des forces surfaciques  $\underline{T}$  sur  $\partial_N \Omega$  :

$$\text{Travail des efforts extérieurs donnés :} \quad W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) := \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\xi}^* \, d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^* \, dS.$$

2. Les éléments de  $\mathcal{C}_0$  sont généralement appelés *déplacements admissibles à 0* ou encore *vitesse virtuelles admissibles*.

3. Par définition, un champ de contraintes est un champ de tenseurs symétriques dont les composantes ont la dimension d'une pression.

**ATTENTION** : Le PPV est donc une autre caractérisation (équivalente à leur définition) des champs de contraintes statiquement admissibles. On voit qu'il met en jeu toutes les conditions aux limites, *i.e.* aussi bien les conditions aux limites portant sur les contraintes que celles portant sur les déplacements. Il est important de comprendre et de savoir établir le PPV non seulement dans le cas du problème-type mais aussi dans le cas de conditions aux limites plus générales, car l'établissement de l'équivalence est la seule façon de s'assurer de la cohérence des conditions aux limites qui ont été écrites.

Il est essentiel de considérer des déplacements virtuels admissibles à 0, *i.e.* appartenant à l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_0$  et non pas à l'espace affine  $\mathcal{C}$ , si l'on veut que le PPV soit satisfait (sous la forme que nous avons adopté). En effet, on ne fait plus apparaître ainsi les réactions inconnues sur la partie du bord à déplacement contrôlé  $\partial_D \Omega$  : comme tout déplacement virtuel envisagé est nul sur  $\partial_D \Omega$ , ces réactions inconnues ne travaillent pas et donc disparaissent de la formulation.

**PREUVE DU PPV.** *Preuve du seulement si.* Commençons par montrer que si un champ de contraintes  $\underline{\sigma}^* \in \mathcal{S}$  alors il vérifie l'équation variationnelle (3.4). Partons des équations d'équilibre volumiques, faisons le produit scalaire par  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$  et intégrons sur le domaine sans les interfaces. En écrivant les quantités en termes de leurs composantes et en adoptant la convention de sommation sur les indices répétés, il vient

$$0 = \int_{\Omega \setminus \Sigma} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} \xi_i^* d\Omega + \int_{\Omega} f_i \xi_i^* d\Omega. \quad (3.5)$$

On intègre par parties le premier terme grâce à la formule de Green-Ostrogradsky que l'on rappelle ci-dessous ( $\varphi$  est une fonction régulière définie sur un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^n$  de bord  $\partial \mathcal{D}$  et  $\underline{n}$  est la normale unitaire sortante à  $\mathcal{D}$ ) :

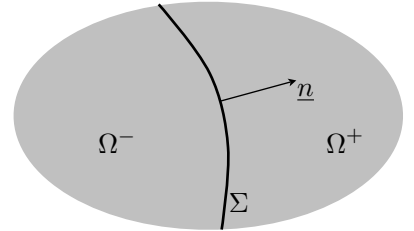
<b>Formule de Green</b> $\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dV = \int_{\partial \mathcal{D}} \varphi n_i dS$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**ATTENTION.** En raison de la possibilité de discontinuité de certaines quantités à travers les interfaces  $\Sigma$ , on doit utiliser cette formule de Green sur le domaine  $\Omega \setminus \Sigma$ . On a alors la formule suivante dont l'établissement est laissé à titre d'exercice (attention au signe sur  $\Sigma$ ) :

**Exercice 3.1.** *A l'aide de la formule de Green, montrer que si  $\varphi$  est continûment différentiable sur  $\Omega \setminus \Sigma$  mais discontinu sur  $\Sigma$ , alors*

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial \Omega} \varphi n_i dS - \int_{\Sigma} [\![\varphi]\!] n_i dS \quad (3.6)$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale unitaire à  $\partial \Omega$  pointant vers l'extérieur de  $\Omega$  ou la normale unitaire à  $\Sigma$  pointant vers la partie  $\Omega^+$ .



Le premier terme de droite de (3.5) devient alors

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} \xi_i^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus \Sigma} \sigma_{ij}^* \frac{\partial \xi_i^*}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \sigma_{ij}^* n_j \xi_i^* dS - \int_{\Sigma} [\![\sigma_{ij} \xi_i^*]\!] n_j dS. \quad (3.7)$$

Comme  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  est symétrique, on a

$$\sigma_{ij}^* \frac{\partial \xi_i^*}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* \left( \frac{\partial \xi_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^*}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}(\underline{\xi}^*). \quad (3.8)$$

D'autre part, en tenant compte des conditions aux limites sur  $\partial_N \Omega$  et  $\partial_D \Omega$ , le terme de bord de (3.7) devient

$$\int_{\partial \Omega} \sigma_{ij}^* n_j \xi_i^* dS = \int_{\partial_N \Omega} T_i \xi_i^* dS. \quad (3.9)$$

Enfin, l'intégrale sur  $\Sigma$  s'annule grâce à la continuité du vecteur contrainte et du déplacement. En reportant (3.7) et (3.9) dans (3.5) devient

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}(\underline{\xi}^*) d\Omega = \int_{\Omega} f_i \xi_i^* d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} T_i \xi_i^* dS$$

ce qui est très exactement l'équation variationnelle (3.4) cherchée puisque  $\underline{\xi}^*$  a été choisi arbitrairement dans  $\mathcal{C}_0$ .  $\square$

*Preuve du si.* Partons maintenant d'un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  qui vérifie (3.4). Il s'agit de montrer qu'il est statiquement admissible, c'est-à-dire qu'il appartient à  $\mathcal{S}$ . En utilisant la formule d'intégration par parties (3.7) et en utilisant le fait que  $\underline{\xi}^* = \underline{0}$  sur  $\partial_D \Omega$  et est continu sur  $\Sigma$ , (3.4) devient

$$0 = - \int_{\Omega \setminus \Sigma} (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{f}) \cdot \underline{\xi}^* d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} - \underline{T}) \cdot \underline{\xi}^* dS - \int_{\Sigma} \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^* \rrbracket \cdot \underline{n} \cdot \underline{\xi}^* dS, \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0. \quad (3.10)$$

Il s'agit ensuite d'"éliminer" les intégrales pour faire apparaître les conditions d'admissibilité statique. On se contente de raisonner formellement ici en s'appuyant sur la propriété suivante<sup>4</sup> :

**Lemme Fondamental du Calcul des Variations.** *Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de bord  $\partial \mathcal{D}$  "régulier",  $f$  une fonction continue sur  $\mathcal{D}$  et  $C_0^1(\mathcal{D})$  l'ensemble des fonctions continûment différentiables dans  $\mathcal{D}$  et nulles sur  $\partial \mathcal{D}$ . Alors, on a*

$$\int_{\mathcal{D}} f \varphi d\mathcal{D} = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathcal{D}) \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}.$$

Commençons par considérer les  $\underline{\xi}^*$  continûment différentiables dans  $\Omega \setminus \Sigma$  et nuls sur  $\partial \Omega \cup \Sigma$ . Comme tous ces  $\underline{\xi}^*$  sont des éléments de  $\mathcal{C}^0$ , d'après (3.10) on doit avoir

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{f}) \cdot \underline{\xi}^* d\Omega = 0$$

et ce pour tous ces  $\underline{\xi}^*$ . En utilisant le Lemme Fondamental, on en déduit que  $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{f} = \underline{0}$  dans  $\Omega \setminus \Sigma$ . En reportant dans (3.10), il vient

$$0 = \int_{\partial_N \Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} - \underline{T}) \cdot \underline{\xi}^* dS - \int_{\Sigma} \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^* \rrbracket \cdot \underline{n} \cdot \underline{\xi}^* dS, \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0.$$

Comme  $\underline{\xi}^*$  peut être choisi arbitrairement sur  $\partial_N \Omega$  et sur  $\Sigma$ , en utilisant une variante du Lemme Fondamental, on obtient  $\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}$  sur  $\partial_N \Omega$  et  $\llbracket \underline{\underline{\sigma}}^* \rrbracket \cdot \underline{n} = \underline{0}$  sur  $\Sigma$ , ce qui complète les conditions d'admissibilité de  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ .  $\square$

---

4. Il existe de nombreuses variantes de ce Lemme où l'on joue sur le domaine  $\mathcal{D}$  et sur la régularité des fonctions  $f$  et  $\varphi$ .

### 3.1.3 Formulation variationnelle du problème d'élastostatique

A partir du PPV, on obtient immédiatement une autre caractérisation de la solution du problème d'élastostatique.

Le(s) champ(s) des déplacements  $\underline{\xi}$  de la structure à l'équilibre est(ont) le(s) champ(s) cinématiquement admissible(s) qui vérifie(nt) l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\underline{\sigma}}^0 \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0. \quad (3.11)$$

PREUVE. Sachant que  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\underline{\sigma}}^0 \in \mathcal{S}$ , il suffit de reporter la relation de comportement dans (3.4). La réciproque est évidente compte tenu du PPV.  $\square$

**Remarque.** En pratique c'est cette formulation variationnelle que l'on utilise pour résoudre de façon approchée le problème d'élastostatique. En particulier, la Méthode des Eléments Finis consiste à construire une approximation en discrétisant le problème. Plus précisément l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_0$ , qui est de dimension infinie, est remplacé par un espace  $\mathcal{C}_0^N$  de dimension finie  $N$ . On cherche une approximation  $\underline{\xi}^N$  de  $\underline{\xi}$  de la forme

$$\underline{\xi}^N(\underline{x}) = \underline{u}^0(\underline{x}) + \sum_{i=1}^N U_i \underline{u}^i(\underline{x}), \quad \underline{U} = (U_1, \dots, U_N) \in \mathbb{R}^N \quad (3.12)$$

où  $\underline{u}^0$  est un élément que l'on choisit (comme l'on veut) dans  $\mathcal{C}$  et les champs  $\underline{u}^i$  sont une famille de  $N$  éléments de  $\mathcal{C}_0$  qui constituent la base de  $\mathcal{C}_0^N$ . Les  $N$  scalaires  $U_i$  sont les inconnues appelées degrés de liberté du problème ainsi discrétisé.

En écrivant l'équation variationnelle (3.11) pour tous les  $\underline{\xi}^*$  de  $\mathcal{C}_0^N$ , on obtient le système linéaire

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} U_j = F_i$$

où les  $K_{ij}$  et les  $F_i$  sont donnés par

$$K_{ij} = \int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^i) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^j) d\Omega, \quad F_i = W_{\text{ext}}(\underline{u}^i) - \int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0) + \underline{\underline{\sigma}}^0 \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^i) d\Omega.$$

La matrice de rigidité  $\underline{\underline{K}} = (K_{ij})$  étant symétrique positive<sup>5</sup>, il existe de nombreuses méthodes numériques efficaces pour résoudre ce système linéaire même dans le cas de très grand nombre de degrés de liberté.

---

5. Elle est définie positive dans la mesure où on a éliminé tout déplacement rigide admissible.

### 3.1.4 Théorème de l'énergie potentielle

La configuration d'équilibre possède des propriétés énergétiques fondamentales tant du point de vue physique que mathématique. Ces propriétés portent sur l'énergie potentielle dont nous donnons la définition ici dans le cas du problème-type.

**Définition de l'énergie potentielle.** L'énergie potentielle de la structure dans un champ de déplacement cinématiquement admissible  $\underline{\xi}^*$  est le scalaire  $\mathcal{P}(\underline{\xi}^*)$  défini par

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) + \underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*).$$

On montre alors le

**Théorème de l'énergie potentielle.** Le champ des déplacements  $\underline{\xi}$  de la structure à l'équilibre, s'il existe, est celui qui possède la plus petite énergie potentielle parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, i.e.

$$\underline{\xi} \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{P}(\underline{\xi}) \leq \mathcal{P}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}. \quad (3.13)$$

Réciproquement, si  $\underline{\xi}$  est un champ de déplacement cinématiquement admissible qui minimise l'énergie potentielle parmi tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles, alors  $\underline{\xi}$  est solution du problème d'élasto-statique.

Cette propriété s'appuie de façon essentielle sur les propriétés de symétrie et de positivité du tenseur de rigidité. Elle ne vaut que dans le cadre restreint de l'élasticité linéarisée. Si l'on ne néglige plus les changements de géométrie et si l'on se place en transformations finies, alors il peut exister des positions d'équilibre qui ne minimisent pas mais rendent seulement stationnaires l'énergie potentielle. On est obligé de rajouter des critères de stabilité pour retenir les “bonnes” configurations d'équilibre.

PREUVE DU THÉORÈME DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE. Soit  $\underline{\xi}$  le champ des déplacements à l'équilibre (en supposant qu'il existe) et soit  $\underline{\xi}^*$  un champ cinématiquement admissible quelconque. Calculons  $\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) - \mathcal{P}(\underline{\xi})$  en se basant sur l'identité suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) + 2\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}).$$

Il vient immédiatement

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{\xi}^*) - \mathcal{P}(\underline{\xi}) &= \int_{\Omega \setminus \Sigma} \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Comme  $\underline{\underline{\sigma}}$  est statiquement admissible, il satisfait (3.4) et donc la deuxième ligne de (3.14) s'annule puisque  $\underline{\xi}^* - \underline{\xi} \in \overline{\mathcal{C}}_0$ . Comme  $\underline{\underline{C}}$  est positif, on déduit de (3.14) que  $\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) \geq \mathcal{P}(\underline{\xi})$  et ce quel que soit le choix de  $\underline{\xi}^*$  dans  $\mathcal{C}$ . On a donc l'inégalité cherchée.

Montrons la réciproque, i.e. si  $\underline{\xi}$  minimise l'énergie potentielle sur  $\mathcal{C}$ , alors il est solution du problème d'élastostatique. Soit donc  $\underline{\xi} \in \mathcal{C}$  ayant la plus petite énergie potentielle. Soit  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$  et  $h \in \mathbb{R}$ . Comme

$\underline{\xi} + h\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$ , on a  $\mathcal{P}(\underline{\xi} + h\underline{\xi}^*) \geq \mathcal{P}(\underline{\xi})$ . Donc en tant que fonction de  $h$ ,  $\mathcal{P}(\underline{\xi} + h\underline{\xi}^*)$  est un polynôme du deuxième degré qui doit être minimal en  $h = 0$ . Ecrivons que sa dérivée est nulle en  $h = 0$ . Un calcul sans difficulté donne

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dh} \mathcal{P}(\underline{\xi} + h\underline{\xi}^*)|_{h=0} \\ &= \int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\underline{\sigma}}^0 \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) \end{aligned}$$

et on reconnaît dans cette égalité l'équation variationnelle (3.11) puisque  $\underline{\xi}^*$  a été choisi arbitrairement dans  $\mathcal{C}_0$ . Donc  $\underline{\xi}$  est solution du problème d'élastostatique.  $\square$

### 3.1.5 Théorème de l'énergie complémentaire

On peut établir de la même façon une propriété d'énergie minimale pour le champ des contraintes. L'énergie en question n'est plus l'énergie potentielle, mais l'*énergie complémentaire* dont nous donnons la définition ci-dessous dans le cas du problème-type.

**Définition de l'énergie complémentaire.** *L'énergie complémentaire de la structure dans un champ de contrainte statiquement admissible  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  est le scalaire  $\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}^*)$  défini par*

$$\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^0) \right) d\Omega - W_{\text{rea}}(\underline{\underline{\sigma}}^*)$$

où  $W_{\text{rea}}(\underline{\underline{\sigma}}^*)$  désigne le travail de liaison des forces surfaciques associées à  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  dans les déplacements imposés sur  $\partial_D \Omega$

$$W_{\text{rea}}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \int_{\partial_D \Omega} \underline{\xi}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} dS.$$

On voit donc que l'énergie complémentaire est la différence entre l'énergie élastique duale (exprimée en contraintes) et le travail des forces de réaction dans les déplacements imposés de la partie du bord concernée. On montre alors le

**Théorème de l'énergie complémentaire.** *Le champ des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  de la structure à l'équilibre, s'il existe, est celui qui possède la plus petite énergie complémentaire parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, i.e.*

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}) \leq \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}^*), \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}. \quad (3.15)$$

Cette propriété s'appuie de façon essentielle sur les propriétés de symétrie et de positivité du tenseur de souplesse. Elle ne vaut que dans le cadre restreint de l'élasticité linéarisée. Il s'agit de démontrer une équivalence. La preuve que le champ des contraintes à l'équilibre minimise l'énergie complémentaire ne présente pas de difficulté.

**PREUVE DU THÉORÈME DE L'ÉNERGIE COMPLÉMENTAIRE.** Soit  $\underline{\underline{\sigma}}$  le champ des contraintes à l'équilibre (en supposant qu'il existe) et soit  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  un champ statiquement admissible quelconque. Calculons  $\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}^*) - \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}})$  en se basant sur l'identité suivante :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}^0) - (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) = (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) + 2(\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}).$$

Il vient immédiatement

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^*(\underline{\sigma}^*) - \mathcal{P}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega \setminus \Sigma} (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) d\Omega - W_{\text{rea}}(\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

En explicitant le travail de liaison et en intégrant par parties la première intégrale de la deuxième ligne ci-dessus, il vient

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) d\Omega - W_{\text{rea}}(\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) = - \int_{\Omega \setminus \Sigma} (\text{div } \underline{\sigma}^* - \text{div } \underline{\sigma}) \cdot \underline{\xi} d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{\xi} \cdot (\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} - \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS,$$

l'intégrale sur  $\partial_D \Omega$  se simplifiant. Mais comme  $\underline{\sigma}^*$  et  $\underline{\sigma}$  sont statiquement admissible, on a  $\text{div } \underline{\sigma}^* = \text{div } \underline{\sigma} = -\underline{f}$  dans  $\Omega \setminus \Sigma$  et  $\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}$  sur  $\partial_N \Omega$ . Par conséquent la deuxième ligne de (3.16) se simplifie et il reste

$$\mathcal{P}^*(\underline{\sigma}^*) - \mathcal{P}^*(\underline{\sigma}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) d\Omega$$

ce qui permet de conclure en vertu de la positivité du tenseur de souplesse.  $\square$

La preuve de la réciproque, *i.e.* que si  $\underline{\sigma}$  est un champ de contraintes statiquement admissible qui minimise l'énergie complémentaire sur  $\mathcal{S}$ , alors il est solution du problème d'élastostatique est plus délicate. En effet, il s'agit de montrer qu'alors le champ de tenseurs symétriques  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  défini par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{S}}(\underline{x}) : \underline{\sigma}(\underline{x}) + \underline{\sigma}^0(\underline{x})$$

est un champ de déformation, *i.e.* la partie symétrique du gradient d'un champ de déplacement et que ce champ de déplacement est cinématiquement admissible. Nous admettrons le résultat.

### 3.2 Quelques propriétés qualitatives générales

Ces formulations énergétiques permettent d'établir des résultats d'existence et d'unicité de la position d'équilibre. C'est en particulier la finitude de l'énergie potentielle qui fournit le cadre de régularité des déplacements. Mais en écartant ici toutes ces questions de régularité, les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème d'équilibre se réduisent à la vérification de conditions qui portent sur les données. Compte tenu des conditions aux limites, on considère tout d'abord les champs de (petits) *déplacements rigides admissibles*, *i.e.* les champs cinématiquement admissibles tels que les déformations associées soient nulles. L'ensemble de ces champs est noté  $\mathcal{R}$  :

<b>Déplacements rigides admissibles</b>	$\mathcal{R} = \{ \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) = \underline{0} \}.$
-----------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

On voit que c'est un espace vectoriel dans le cas du problème-type. Il se réduit au déplacement nul si le bord du domaine est suffisamment attaché<sup>6</sup>.

Le résultat d'existence et d'unicité se formule alors ainsi

**Existence.** *Le problème d'élastostatique possède une solution si et seulement si*

---

6. En fait, il suffit de fixer trois points pour interdire tout déplacement rigide.

1. les données sont assez régulières ;
2. l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles n'est pas vide ;
3. le travail des efforts extérieurs donnés est nul dans tout (petit) déplacement rigide admissible<sup>7</sup>,  
i.e.

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = 0, \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{R}. \quad (3.17)$$

**Unicité.** La solution est unique à un déplacement rigide admissible près. Autrement dit, si  $\underline{\xi} \in \mathcal{C}$  est solution, alors les autres solutions sont tous les  $\underline{\xi}' \in \mathcal{C}$  tels que  $\underline{\xi}' - \underline{\xi} \in \mathcal{R}$ . Par conséquent le champ de contraintes solution  $\underline{\sigma}$  est unique.

**PREUVE. Existence.** Le fait que le problème d'élastostatique ne peut pas avoir de solution s'il existe un déplacement rigide admissible  $\underline{\xi}^*$  tel que  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) \neq 0$  se voit aussi bien sur l'équation variationnelle (3.11) que sur l'énergie potentielle. En effet, en considérant  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{R}$ , comme  $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) = \underline{0}$ , (3.11) exige que  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = 0$ .

Du point de vue de l'énergie potentielle, si  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{R}$ , alors on a  $\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = -W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*)$  et, comme  $\mathcal{R}$  est un espace vectoriel, on a aussi  $\alpha \underline{\xi}^* \in \mathcal{R}$  et  $\mathcal{P}(\alpha \underline{\xi}^*) = -\alpha W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, s'il existe  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{R}$  tel que  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) \neq 0$ , en choisissant  $\alpha$  du signe de  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*)$  et en le faisant tendre vers l'infini en valeur absolue, on fera tendre  $\mathcal{P}(\alpha \underline{\xi}^*)$  vers  $-\infty$ . Par conséquent l'énergie potentielle n'est pas bornée inférieurement sur  $\mathcal{C}$  et le problème d'élastostatique ne peut avoir de solution en vertu du théorème de l'énergie potentielle.

La preuve qu'il existe effectivement une solution si la condition (3.17) est satisfaite sort du cadre de ce cours. Elle exige que l'on précise le cadre de régularité des champs de déplacements. En élasticité linéaire, le cadre naturel est celui des champs d'énergie potentielle finie, ce qui correspond à l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Le lecteur intéressé est renvoyé à [7] et [2].

**Unicité.** Soit  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\xi}'$  deux solutions du problèmes d'élastostatique. Ils satisfont donc tous deux (3.11) et leur différence  $\underline{\xi}' - \underline{\xi}$  est un élément de  $\mathcal{C}_0$ . On a donc, d'après (3.11),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}') + \underline{\sigma}^0 \right) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) d\Omega &= W_{\text{ext}}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}), \\ \int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) + \underline{\sigma}^0 \right) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) d\Omega &= W_{\text{ext}}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}). \end{aligned}$$

En faisant la différence des deux équations, il vient

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) d\Omega = 0$$

dont on déduit, comme  $\underline{\underline{C}}$  est défini positif, que  $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) = 0$ . Donc  $\underline{\xi}' - \underline{\xi} \in \mathcal{R}$ .

Réciproquement, si  $\underline{\xi}$  vérifie (3.11) et si  $\underline{\xi}' - \underline{\xi} \in \mathcal{R}$ , alors  $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}') = \underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$  et donc  $\underline{\xi}'$  vérifie (3.11).  $\square$

**Formule de Clapeyron.** En l'absence de précontraintes et quand  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel, l'énergie potentielle et le travail des efforts extérieurs associés au champ de déplacement solution  $\underline{\xi}$  sont reliés par la formule dite de Clapeyron :

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}) = -\frac{1}{2} W_{\text{ext}}(\underline{\xi}). \quad (3.18)$$

7. Cette condition ne fait que traduire le principe fondamental de la statique demandant que la résultante des forces extérieures doit être nulle pour que la structure puisse être en équilibre.



PREUVE. Si  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel, alors on peut choisir  $\underline{\xi}^* = \underline{\xi}$  dans (3.11). Si de plus  $\underline{\sigma}^0 = \underline{0}$ , alors (3.11) s'écrit

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \underline{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}).$$

Il suffit de reporter cette égalité dans la définition de  $\mathcal{P}(\underline{\xi})$  pour obtenir le résultat.  $\square$

En présence de précontraintes ou quand  $\mathcal{C}$  n'est pas un espace vectoriel, on peut obtenir des variantes de la formule précédente. Nous ne les présentons pas ici.

Une autre conséquence importante de la linéarité des équations est qu'on peut appliquer le principe dit de superposition qui permet de décomposer le problème général en sous-problèmes "élémentaires", chacun mettant en jeu un seul paramètre de chargement, les autres étant pris égaux à 0.

**Principe de superposition.** *Pour une structure de géométrie donnée, constituée d'un matériau donné et pour un partitionnement du bord en  $\partial_D \Omega$  et  $\partial_N \Omega$  donné, si  $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$  est solution du problème d'élastostatique associé au jeu de données  $(\underline{\xi}^d, \underline{f}, \underline{T}, \underline{\sigma}^0)$  et si  $(\underline{\xi}', \underline{\sigma}')$  est solution du problème d'élastostatique associé au jeu de données  $(\underline{\xi}^{d'}, \underline{f}', \underline{T}', \underline{\sigma}^{0'})$ , alors  $(\underline{\xi} + \underline{\xi}', \underline{\sigma} + \underline{\sigma}')$  est solution du problème d'élastostatique associé au jeu de données  $(\underline{\xi}^d + \underline{\xi}^{d'}, \underline{f} + \underline{f}', \underline{T} + \underline{T}', \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}^{0'})$ .*

PREUVE. On le vérifie facilement à partir de la formulation des problèmes aux limites.  $\square$

### 3.3 Extension à d'autres types de conditions aux limites

Toutes les propriétés variationnelles précédentes peuvent être étendues à des problèmes d'élastostatique avec des conditions aux limites beaucoup plus générales que celles de type Dirichlet ou Neumann. C'est en particulier vrai dans le cas suivant

**Hypothèse (Chargements généralisés).** *On suppose que*

1. *L'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles est un espace affine  $\mathcal{C}$  dont l'espace vectoriel associé est  $\mathcal{C}_0$  ;*
2. *Le travail des efforts extérieurs donnés est une forme linéaire  $W_{\text{ext}}$  définie sur  $\mathcal{C}_0$ .*

Dans ce cadre étendu, les champs de contraintes statiquement admissibles  $\underline{\sigma}^*$  restent ceux qui vérifient le Principe des Travaux Virtuels

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0. \quad (3.19)$$

Le travail de liaison  $W_{\text{rea}}$  est alors défini sur l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles par

$$\underline{\sigma}^* \in \mathcal{S} \mapsto W_{\text{rea}}(\underline{\sigma}^*) := \int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^d) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^d)$$

où  $\underline{\xi}^d$  est un champ de déplacement cinématiquement admissible choisi arbitrairement dans  $\mathcal{C}$ .

Vérifions que cette définition a bien un sens en montrant que le travail de liaison ne dépend pas du choix de  $\underline{\xi}^d$  dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $\underline{\xi}_*^d$  un autre champ cinématiquement admissible, comme  $\underline{\sigma}^*$  est statiquement admissible, on a

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^d - \underline{\xi}_*^d) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^d - \underline{\xi}_*^d)$$

et donc

$$W_{\text{rea}}(\underline{\sigma}^*) = \int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^d) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^d) = \int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}_*^d) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}_*^d).$$

**ATTENTION.** En pratique, on commence par écrire les conditions aux limites en distinguant celles qui sont de nature cinématique de celles qui sont d'ordre statique. On déduit des premières l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles. Il s'agit ensuite de définir le travail des efforts extérieurs donnés. Cela se fait par construction en établissant le *seulement si* du PPV. Cette construction est illustrée dans l'exercice suivant.

**Exercice 3.2 (Le PPV dans l'essai à force contrôlée).** On se replace dans la situation de l'Exercice 1.1 où l'on contrôle la force  $\underline{\mathcal{F}}$  et le moment  $\underline{\mathcal{M}}$  exercés sur le plateau de la presse. Etablir le PPV en précisant les définitions de  $\mathcal{C}$  et  $W_{\text{ext}}$ .

**CORRIGÉ.** Compte tenu des conditions aux limites établies dans l'Exercice 1.1, l'ensemble  $\mathcal{C}$  des déplacements cinématiquement admissibles s'écrit

$$\mathcal{C} = \{ \underline{\xi}^* : \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } S_0, \quad \exists \underline{a}(\underline{\xi}^*) \in \mathbb{R}^3, \exists \underline{\omega}(\underline{\xi}^*) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \underline{\xi}^*(\underline{x}) = \underline{a}(\underline{\xi}^*) + \underline{\omega}(\underline{\xi}^*) \wedge (\underline{x} - \underline{x}_L) \text{ sur } S_L \}$$

où l'on fait figurer explicitement la dépendance de la translation et de la rotation au champ de déplacement admissible considéré. On voit que c'est un *espace vectoriel* car si  $\alpha^* \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha' \in \mathbb{R}$ ,  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$  et  $\underline{\xi}' \in \mathcal{C}$ , alors  $\alpha^* \underline{\xi}^* + \alpha' \underline{\xi}' \in \mathcal{C}$ . De plus, on a

$$\underline{a}(\alpha^* \underline{\xi}^* + \alpha' \underline{\xi}') = \alpha^* \underline{a}(\underline{\xi}^*) + \alpha' \underline{a}(\underline{\xi}'), \quad \underline{\omega}(\alpha^* \underline{\xi}^* + \alpha' \underline{\xi}') = \alpha^* \underline{\omega}(\underline{\xi}^*) + \alpha' \underline{\omega}(\underline{\xi}'),$$

autrement dit, la dépendance de la translation et de la rotation au déplacement admissible est linéaire.

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des contraintes statiquement admissibles s'écrit

$$\mathcal{S} = \left\{ \underline{\sigma}^* : \text{div } \underline{\sigma}^* = \underline{0} \text{ dans } S \times (0, L), \quad \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \partial S \times (0, L), \right. \\ \left. \int_{S_L} \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \cdot \underline{e}_3 dS = \underline{\mathcal{F}}, \quad \int_{S_L} (\underline{x} - \underline{x}_L) \wedge \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \cdot \underline{e}_3 dS = \underline{\mathcal{M}} \right\}.$$

Etablissons le *seulement si* du PPV en suivant la démarche décrite page 33. Soit  $\underline{\sigma}^* \in \mathcal{S}$ . En prenant  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$ , en multipliant l'équation d'équilibre volumique par  $\underline{\xi}^*$  et en intégrant sur  $S \times (0, L)$  (il n'y a pas d'interfaces ici), on obtient

$$0 = \int_{S \times (0, L)} \text{div } \underline{\sigma}^* \cdot \underline{\xi}^* d\Omega.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties (cf (3.7)–(3.8)), il vient

$$\int_{S \times (0, L)} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega = - \int_{S_0} \underline{\xi}^* \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{e}_3 dS + \int_{\partial S \times (0, L)} \underline{\xi}^* \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} dS + \int_{S_L} \underline{\xi}^* \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{e}_3 dS. \quad (3.20)$$

L'intégrale sur  $S_0$  s'annule puisque  $\underline{\xi}^*$  y est nul, l'intégrale sur  $\partial S \times (0, L)$  s'annule puisque  $\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n}$  y est nul. L'intégrale sur  $S_L$  se simplifie en tenant compte des conditions cinématiques que doit y satisfaire  $\underline{\xi}^*$  et des conditions statiques que doit y satisfaire  $\underline{\sigma}^*$ . Finalement, on a

$$\int_{S_L} \underline{\xi}^* \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{e}_3 dS = \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{a}(\underline{\xi}^*) + \underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{\omega}(\underline{\xi}^*).$$

En reportant dans (3.20), on a finalement obtenu le PPV :

$$\int_{S \times (0, L)} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$$

où le travail des efforts extérieurs donnés est défini par

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) := \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{a}(\underline{\xi}^*) + \underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{\omega}(\underline{\xi}^*).$$

Autrement dit, dans l'essai à force contrôlée, le travail des efforts extérieurs donnés est la somme du travail de la force imposée dans la translation virtuelle du plateau et du travail du moment imposé dans la rotation virtuelle du plateau. Noter que  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*)$  dépend linéairement de  $\underline{\xi}^*$ .  $\square$

**ATTENTION.** Dans le cas où l'essai sur éprouvette est fait à *déplacement contrôlé*, l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles est

$$\mathcal{C} = \{\underline{\xi}^* : \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } S_0, \quad \underline{\xi}^*(\underline{x}) = \underline{a} + \underline{\omega} \wedge (\underline{x} - \underline{x}_L) \text{ sur } S_L\}.$$

C'est un espace *affine* dont l'espace vectoriel associé est

$$\mathcal{C}_0 = \{\underline{\xi}^* : \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } S_0 \cup S_L\}.$$

D'autre part le travail des efforts extérieurs donnés est *nul*,  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = 0 \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$ , car les forces ne sont contrôlées que sur la surface latérale de l'éprouvette (et elles y sont nulles). La force et le moment à exercer sur le plateau de la presse pour le déplacer n'apparaissent pas parce qu'ils ne sont pas donnés.

### 3.4 Chargements définis par un nombre fini de paramètres

Un cas fréquent en pratique est celui où le chargement est défini par un nombre fini de paramètres (l'intensité d'une pression, l'intensité de la pesanteur, le déplacement du plateau d'une presse, ...) qui peuvent être aussi bien du type déplacement contrôlé que force contrôlée. On peut alors associer à ces paramètres de chargement des grandeurs "duales" et représenter ainsi la réponse globale de la structure en termes des relations entre les paramètres en dualité (on parle de *déplacement généralisé* et de *force généralisée*). Dans le cadre de l'élasticité linéaire cela conduit aux notions de *coefficients de raideur* et de *coefficients de souplesse*. Lorsque nous aborderons des comportements inélastiques dans les deux autres parties de ce cours, ces relations entre forces généralisées et déplacements généralisés deviendront non linéaires et on verra même lors de la partie sur la rupture que la réponse obtenue dépend de façon essentielle du fait que l'on contrôle les déplacements ou bien les forces.

Dans cette section, nous introduisons ces notions soit de façon générale, soit à travers d'exemples et nous les appliquons au cadre de l'élasticité linéaire.

### 3.4.1 Quelques exemples

Voici quelques exemples où l'on se place dans le cadre du problème type d'élastostatique linéarisé.

— La **donnée**  $\underline{\xi}^d$  des déplacements sur  $\partial_D\Omega$  peut s'écrire

$$\underline{\xi}^d(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \underline{u}^i(\underline{x}), \quad (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$$

où les  $n$  champs  $\underline{u}^i$  sont des données normalisées. Les paramètres  $q_i$  sont appelés *déplacements généralisés*.

— La **donnée**  $\underline{T}$  des forces surfaciques sur  $\partial_N\Omega$  peut s'écrire

$$\underline{T}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m Q_i \underline{T}^i(\underline{x}), \quad (Q_1, \dots, Q_m) \in \mathbb{R}^m$$

où les  $m$  champs  $\underline{T}^i$  sont des données normalisées. Les paramètres  $Q_i$  sont appelés *forces généralisées*.

— La **donnée**  $\underline{f}$  des forces volumiques dans  $\Omega$  peut s'écrire

$$\underline{f}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^p Q_i \underline{f}^i(\underline{x}), \quad (Q_1, \dots, Q_p) \in \mathbb{R}^p$$

où les  $p$  champs  $\underline{f}^i$  sont des données normalisées. Les paramètres  $Q_i$  sont aussi des *forces généralisées*.

— La **donnée**  $\underline{\sigma}^0$  du champ de précontraintes dans  $\Omega$  peut s'écrire

$$\underline{\sigma}^0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^r Q_i \underline{\sigma}^{0i}(\underline{x}), \quad (Q_1, \dots, Q_r) \in \mathbb{R}^r$$

où les  $r$  champs  $\underline{\sigma}^{0i}$  sont des données normalisées. Les paramètres  $Q_i$  sont encore des *forces généralisées*.

On peut évidemment envisager n'importe quelle combinaison des cas précédents. A l'aide du principe de superposition, on peut alors écrire la solution du problème type d'élastostatique comme la combinaison linéaire des problèmes élémentaires où l'on fixe soit l'un des déplacements généralisés à 1 et les autres déplacements généralisés ainsi que toutes les forces généralisées à 0, soit une force généralisée à 1 et les autres forces généralisées ainsi que tous les déplacements généralisés à 0. Illustrons ceci sur un exemple.

**EXEMPLE** : Considérons l'essai sur éprouvette à déplacement contrôlé en tenant compte de la pesanteur  $\underline{g} = -g\underline{e}_3$ , de la pression atmosphérique  $p_0$  qui agit sur la surface latérale  $\partial S \times (0, L)$  et en supposant que l'éprouvette est à une température homogène  $T_1$  différente de la température de référence  $T_0$ , le matériau ayant un comportement thermoélastique isotrope.

L'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles est l'espace affine

$$\mathcal{C} = \{ \underline{\xi}^* : \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } S_0, \quad \underline{\xi}^*(\underline{x}) = \underline{a} + \omega \wedge (\underline{x} - \underline{x}_L) \text{ sur } S_L \}.$$

alors que le potentiel des efforts extérieurs donnés s'écrit

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = -\rho g \int_{S \times (0,L)} \xi_3^* d\Omega - p_0 \int_{\partial S \times (0,L)} \underline{\xi}^* \cdot \underline{n} dS, \quad \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0.$$

La formulation variationnelle du problème d'élastostatique est donc

$$\int_{S \times (0,L)} \left( \lambda \operatorname{div} \underline{\xi} \operatorname{div} \underline{\xi}^* + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) \right) d\Omega = \mathcal{L}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0,$$

avec

$$\mathcal{L}(\underline{\xi}^*) = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) + (3\lambda + 2\mu)\alpha(T_1 - T_0) \int_{S \times (0,L)} \operatorname{div} \underline{\xi}^* d\Omega.$$

Remarquons que, comme  $\underline{\xi}^* = \underline{0}$  sur  $S_0 \cup S_L$  pour tout  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$ , on a en vertu de la formule de Green

$$\forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0, \quad \int_{\partial S \times (0,L)} \underline{\xi}^* \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial \Omega} \underline{\xi}^* \cdot \underline{n} dS = \int_{S \times (0,L)} \operatorname{div} \underline{\xi}^* d\Omega.$$

Par conséquent, on peut regrouper deux termes dans  $\mathcal{L}$  qui devient

$$\mathcal{L}(\underline{\xi}^*) = -\rho g \int_{S \times (0,L)} \xi_3^* d\Omega + ((3\lambda + 2\mu)\alpha(T_1 - T_0) - p_0) \int_{S \times (0,L)} \operatorname{div} \underline{\xi}^* d\Omega.$$

On a donc établi la propriété fondamentale suivante

**Equivalence pression-température.** *L'influence de la pression atmosphérique est équivalente à imposer au matériau une variation de température par rapport à la température de référence égale à  $-p_0/(3\lambda + 2\mu)\alpha$  (donc négative).*

On voit finalement que ce problème peut se décomposer en 8 problèmes élémentaires : 3 correspondants aux translations du plateau, 3 aux rotations du plateau, 1 à la pesanteur et 1 à la température (ou à la pression). On peut choisir pour paramètres de chargement : les 6 déplacements généralisés  $\underline{q} = (\underline{\alpha}, \underline{\omega})$  et les 2 forces généralisées  $\underline{Q} = (-\rho g \operatorname{vol}(\Omega), (3\lambda + 2\mu)\alpha(T_1 - T_0) - p_0)$ .

### 3.4.2 Grandeurs duales

A chaque déplacement généralisé, on peut associer par dualité une force généralisée, et de même, à chaque force généralisée, on peut associer par dualité un déplacement généralisé. Dans le cas général, les définitions des grandeurs duales sont les suivantes :

- Soit  $\underline{\sigma}^*$  un champ de contraintes statiquement admissibles. On appelle force généralisée associée à  $\underline{\sigma}^*$  et à la donnée  $\underline{u}^i$  sur  $\partial_D \Omega$  la quantité  $Q_i(\underline{\sigma}^*)$  définie par

$$Q_i(\underline{\sigma}^*) = \int_{\partial_D \Omega} \underline{u}^i \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} dS.$$

- Soit  $\underline{\xi}^*$  un champ de déplacement cinématiquement admissible. On appelle déplacement généralisé associé à  $\underline{\xi}^*$  et à la donnée  $\underline{T}^i$  sur  $\partial_N \Omega$  la quantité  $q_i(\underline{\xi}^*)$  définie par

$$q_i(\underline{\xi}^*) = \int_{\partial_N \Omega} \underline{T}^i(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}^*(\underline{x}) \, dS.$$

- Soit  $\underline{\xi}^*$  un champ de déplacement cinématiquement admissible. On appelle déplacement généralisé associé à  $\underline{\xi}^*$  et à la donnée  $\underline{f}^i$  dans  $\Omega$  la quantité  $q_i(\underline{\xi}^*)$  définie par

$$q_i(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \underline{f}^i(\underline{x}) \cdot \underline{\xi}^*(\underline{x}) \, d\Omega.$$

- Soit  $\underline{\xi}^*$  un champ de déplacement cinématiquement admissible. On appelle déplacement généralisé associé à  $\underline{\xi}^*$  et à la donnée  $\underline{\sigma}^{0i}$  dans  $\Omega$  la quantité  $q_i(\underline{\xi}^*)$  définie par

$$q_i(\underline{\xi}^*) = - \int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\sigma}^{0i}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*)(\underline{x}) \, d\Omega,$$

le signe  $-$  étant introduit par commodité.

**EXEMPLE** : Pour l'exemple précédent, cela donne le tableau de correspondance suivant entre déplacements généralisés et forces généralisées

Déplacement généralisé	$\underline{a}$	$\underline{\omega}$	$\Delta(\underline{\xi}^*)$	$V(\underline{\xi}^*)$
Force généralisée	$\underline{\mathcal{F}}(\underline{\sigma}^*)$	$\underline{\mathcal{M}}(\underline{\sigma}^*)$	$-\rho g \text{vol}(\Omega)$	$(3\lambda + 2\mu)\alpha(T_1 - T_0) - p_0$

$$\text{avec} \quad \Delta(\underline{\xi}^*) = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \xi_3^* d\Omega, \quad V(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \text{div} \, \underline{\xi}^* d\Omega$$

$$\text{et} \quad \underline{\mathcal{F}}(\underline{\sigma}^*) = \int_{S_L} \underline{\sigma}^* \cdot \underline{e}_3 \, dS, \quad \underline{\mathcal{M}}(\underline{\sigma}^*) = \int_{S_L} (\underline{x} - \underline{x}_L) \wedge \underline{\sigma}^* \cdot \underline{e}_3 \, dS.$$

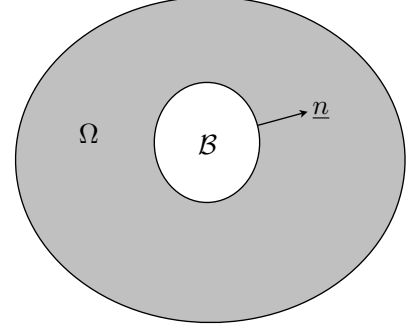
On voit donc qu'à la translation du plateau est associée la résultante des forces ; à la rotation, le moment résultant ; au poids de l'éprouvette, le déplacement vertical moyen de l'éprouvette ; à la pression, la variation de volume de l'éprouvette.

Il n'est évidemment pas nécessaire d'être dans le cadre du problème-type pour définir les notions de déplacements généralisés et de forces généralisés. Cela s'étend à tous les types de conditions aux limites. On peut même dire que cette dualité déplacement généralisé–force généralisée permet de construire de façon systématique des conditions aux limites générales cohérentes. On voit d'ailleurs dans l'exemple précédent qu'à une condition à la limite de type Dirichlet est associée par dualité une condition à la limite en force généralisée qui sera de type non local et de même à une condition à la limite de type Neumann est associée une condition à la limite en déplacement généralisé qui sera de type non local. Voici un autre exemple dont le traitement est laissé à titre d'exercice.

**Exercice 3.3.** On considère une structure élastique qui possède une cavité intérieure  $\mathcal{B}$  contenant un fluide à une pression uniforme  $p$ . On s'intéresse à l'équilibre de la structure élastique en supposant connue la pression  $p$  du fluide qui est prise comme force généralisée. Montrer que le déplacement généralisé associé est la variation de volume de la cavité, i.e.

$$q(\underline{\xi}^*) = \int_{\partial\mathcal{B}} \underline{\xi}^* \cdot \underline{n} \, dS,$$

$\underline{n}$  désignant la normale extérieure à la cavité.



### 3.4.3 Coefficients de souplesse et coefficients de raideur structurels

En vertu du principe de superposition, les forces généralisées et les déplacements généralisés sont reliés à l'équilibre par des relations linéaires. Ceci permet de définir des coefficients d'élasticité globaux pour l'ensemble de la structure : *coefficients de souplesse* qui donnent les déplacements généralisés en fonction des forces généralisées et *coefficients de raideur*, inverses des précédents, qui donnent les forces généralisées en fonction des déplacements généralisés.

Nous ne traiterons pas ici le cas général, mais nous nous contenterons d'illustrer ces notions sous forme d'exercice sur l'exemple précédent lorsqu'on contrôle les forces sur le plateau de presse.

**Exercice 3.4.** Dans le cas de l'essai sur éprouvette à force contrôlée où l'on tient compte de la pesanteur, de la pression atmosphérique et du fait que la température de l'éprouvette est  $T_1$ , réécrire le problème d'élastostatique sous forme variationnelle, identifier les forces généralisées données et les déplacements généralisés associés. A l'aide du principe de superposition, établir les relations entre les déplacements généralisés et les forces généralisées, puis étudier leurs propriétés.

CORRIGÉ. L'ensemble des déplacements admissibles est l'espace vectoriel  $\mathcal{C}$ , cf Exercice 3.2,

$$\mathcal{C} = \{ \underline{\xi}^* : \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } S_0, \exists \underline{a}(\underline{\xi}^*) \in \mathbb{R}^3, \exists \underline{\omega}(\underline{\xi}^*) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \underline{\xi}^*(\underline{x}) = \underline{a}(\underline{\xi}^*) + \underline{\omega}(\underline{\xi}^*) \wedge (\underline{x} - \underline{x}_L) \text{ sur } S_L \}$$

La forme linéaire  $\mathcal{L}$  prenant en compte le travail des efforts extérieurs et le travail des précontraintes s'écrit

$$\mathcal{L}(\underline{\xi}^*) := \underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{a}(\underline{\xi}^*) + \underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{\omega}(\underline{\xi}^*) - \rho g \text{vol}(\Omega) \Delta(\underline{\xi}^*) + ((3\lambda + 2\mu)\alpha(T_1 - T_0) - p_0)V(\underline{\xi}^*)$$

que l'on peut écrire aussi  $\mathcal{L}(\underline{\xi}^*) := \underline{Q} \cdot \underline{q}(\underline{\xi}^*)$  en introduisant le vecteur force généralisée  $\underline{Q}$  et le vecteur déplacement associé dépendant linéairement de  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$ , tous deux vecteurs de  $\mathbb{R}^8$  définis par

$$\boxed{\underline{Q} = (\underline{\mathcal{F}}, \underline{\mathcal{M}}, -\rho g \text{vol}(\Omega), (3\lambda + 2\mu)\alpha(T_1 - T_0) - p_0)}, \quad \boxed{\underline{q}(\underline{\xi}^*) = (\underline{a}(\underline{\xi}^*), \underline{\omega}(\underline{\xi}^*), \Delta(\underline{\xi}^*), V(\underline{\xi}^*))}.$$

Le problème variationnel d'élastostatique s'écrit alors

$$\boxed{\text{Trouver } \underline{\xi} \in \mathcal{C} \text{ tel que } \int_{S \times (0, L)} \left( \lambda \text{div } \underline{\xi} \text{div } \underline{\xi}^* + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) \right) d\Omega = \underline{Q} \cdot \underline{q}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.}$$

On voit qu'à l'équilibre on a

$$\int_{S \times (0,L)} \left( \lambda (\operatorname{div} \underline{\xi})^2 + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) \right) d\Omega = \mathcal{L}(\underline{\xi}) = \underline{Q} \cdot \underline{q}(\underline{\xi})$$

ce qui est une généralisation de la formule de Clapeyron.

En vertu du principe de superposition, le problème variationnel peut se décomposer en les 8 problèmes variationnels suivants : pour  $i \in \{1, \dots, 8\}$ ,

$$\text{trouver } \underline{\xi}^i \in \mathcal{C} \text{ tel que } \int_{S \times (0,L)} \left( \lambda \operatorname{div} \underline{\xi}^i \operatorname{div} \underline{\xi}^* + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^i) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) \right) d\Omega = q_i(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}. \quad (3.21)$$

Comme  $\mathcal{R} = \{0\}$  puisque la base est fixée, chacun de ces problèmes admet une solution unique et la solution du problème complet s'écrit

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^8 Q_j \underline{\xi}^j(\underline{x}).$$

Posons  $S_{ij} := q_i(\underline{\xi}^j)$ . Comme  $q_i(\underline{\xi}) = \sum_{j=1}^8 Q_j q_i(\underline{\xi}^j) = \sum_{j=1}^8 S_{ij} Q_j$ , on a la relation matricielle suivante entre les déplacements généralisés et les forces généralisées :

$$\boxed{\underline{q}(\underline{\xi}) = \underline{S} \cdot \underline{Q}} \quad .$$

La matrice  $8 \times 8$   $\underline{S}$  représente la *matrice de souplesse* de la structure associée à cet essai. Par exemple  $S_{33}$  représente la translation verticale du plateau due à une force verticale unité exercée sur le plateau, les autres forces généralisées étant nulles. Les coefficients hors diagonale sont des coefficients de couplage. Par exemple,  $S_{37}$  représente la translation verticale du plateau due à un poids unité (vertical ascendant), les autres forces généralisées étant nulles ; alors que  $S_{73}$  représente le déplacement vertical moyen de l'éprouvette dû à une force verticale unité exercée sur le plateau de la presse, les autres forces généralisées étant nulles.

Etudions les propriétés de  $\underline{S}$ . En prenant  $\underline{\xi}^* = \underline{\xi}^j$  dans (3.21), on déduit que

$$S_{ij} = S_{ji} = \int_{S \times (0,L)} \left( \lambda \operatorname{div} \underline{\xi}^i \operatorname{div} \underline{\xi}^j + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^i) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^j) \right) d\Omega$$

et donc que la matrice  $\underline{S}$  est symétrique. Cette propriété (qui est aussi appelée *propriété de réciprocité de Maxwell-Betti*) est évidemment très importante et pas vraiment intuitive. Ainsi, comme  $S_{37} = S_{73}$ , la translation verticale du plateau due à un poids vertical ascendant unité est égale au déplacement vertical moyen de l'éprouvette dû à une force verticale unité exercée sur le plateau.

De plus,  $\underline{S}$  est définie positive, puisque

$$S_{ij} Q_i Q_j = \int_{S \times (0,L)} \left( \lambda \operatorname{div} \underline{\xi} \operatorname{div} \underline{\xi} + 2\mu \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) \right) d\Omega \geq 0, \quad \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^8,$$

l'égalité n'ayant lieu que si  $\underline{\xi} = 0$  et donc que si  $\underline{Q} = 0$ .

Si la section  $S$  de l'éprouvette possède des symétries, alors on peut montrer que certains coefficients de souplesse sont nuls ou égaux à d'autres. Par exemple, si la section est le carré  $(-D, D)^2$ , alors il est facile de voir que  $S_{11} = S_{22}$  et  $S_{44} = S_{55}$  simplement du fait que les directions 1 et 2 sont équivalentes. De même  $S_{12} = S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = 0$ , car par symétrie une force suivant  $\underline{e}_1$  n'induit pas une translation du plateau suivant  $\underline{e}_2$  et une force suivant  $\underline{e}_3$  n'induit pas de translation du plateau suivant  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ . Par contre,  $S_{37}$  et  $S_{38}$  ne sont pas nuls car une force suivant  $\underline{e}_3$  induit un déplacement vertical moyen et une variation de volume de l'éprouvette.



En inversant la relation entre  $\underline{Q}$  et  $\underline{q}(\underline{\xi})$ , on obtient la matrice de raideur,

$$\underline{Q} = \underline{R} \cdot \underline{q}(\underline{\xi}) \quad ,$$

qui possède les mêmes propriétés de symétrie et de définie positivité que la matrice de souplesse. Le coefficient de raideur  $R_{ij}$  s'interprète comme étant la force généralisée  $Q_i$  due à un déplacement généralisé  $q_j = 1$ , les autres déplacements généralisés étant nuls. Ainsi,  $R_{37}$  est la force verticale qu'exercerait le plateau sur l'éprouvette si l'on imposait un déplacement vertical moyen de l'éprouvette égal à 1, tout en bloquant les déplacements du plateau et la variation de volume de l'éprouvette.  $\square$

**Exercice 3.5.** Reprendre l'exercice précédent en envisageant une éprouvette à section circulaire de rayon  $R$ . Résoudre exactement le problème élémentaire  $i = 6$  correspondant à un essai de torsion à couple de torsion unitaire imposé, i.e.  $Q_6 = 1$ . En déduire l'expression du coefficient de souplesse  $S_{66}$  et montrer que les coefficients de couplage  $S_{j6}$ ,  $j \neq 6$ , sont nuls. En déduire le coefficient de raideur  $R_{66}$ .

CORRIGÉ. On vérifie sans difficulté que les champs des déplacements et des contraintes solutions du problème élémentaire de torsion sont, en coordonnées cylindriques, de la forme

$$\underline{\xi}^6(\underline{x}) = \omega_3 \frac{z}{L} r \underline{e}_\theta, \quad \underline{\sigma}^6(\underline{x}) = \mu \omega_3 \frac{r}{L} \underline{e}_\theta \otimes_s \underline{e}_z$$

et donc tous les déplacements généralisés associés à  $\underline{\xi}^6$  sont nuls hormis  $q_6(\underline{\xi}^6) = \omega_3$ ,

$$\underline{a}(\underline{\xi}^6) = \underline{0}, \quad \underline{\omega}(\underline{\xi}^6) = \omega_3 \underline{e}_3, \quad \Delta(\underline{\xi}^6) = 0, \quad V(\underline{\xi}^6) = 0.$$

L'angle de torsion  $\omega_3$  est déterminé par la donnée du couple de torsion, i.e.  $1 = Q_6 = \int_{S_L} r^2 \sigma_{\theta z} dS$ . D'où

$$\omega_3 = \frac{2L}{\pi \mu R^4}.$$

Comme, par définition,  $S_{j6} = q_j(\underline{\xi}^6)$ , on obtient  $S_{66} = \omega_3$  et  $S_{j6} = 0$  pour  $j \neq 6$ . Par symétrie, on a aussi  $S_{6j} = 0$  pour  $j \neq 6$ . Par conséquent  $R_{66} = 1/\omega_3$  et les coefficients de couplage  $R_{6j} = R_{j6}$ ,  $j \neq 6$ , sont nuls.

Noter que ces résultats sont spécifiques à une section circulaire. Pour des sections de forme différente, certains coefficients de couplage peuvent être non nuls. Ainsi dans le cas d'une section carrée,  $S_{36}$ ,  $S_{76}$  et  $S_{86}$  sont non nuls car la torsion s'accompagne d'un déplacement vertical et d'un changement de volume de l'éprouvette.  $\square$

## 3.5 Quelques conséquences des théorèmes de l'énergie

### 3.5.1 Encadrement de la solution

Nous allons voir qu'en utilisant le théorème de l'énergie potentielle et le théorème de l'énergie complémentaire, on peut construire systématiquement un encadrement de la solution d'un problème d'élastostatique. Le point de départ est la formule suivante

**La formule reliant les minima.** Si le problème d'élastostatique possède une solution  $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ , alors le minimum de l'énergie potentielle et le minimum de l'énergie complémentaire sont reliés par

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}) + \mathcal{P}^*(\underline{\sigma}) = 0.$$

PREUVE. En partant des définitions générales de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire données dans la section 3.3, on obtient en additionnant

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{\xi}) + \mathcal{P}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \frac{1}{2} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^0) : \underline{\underline{S}} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^0) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\sigma}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) - \underline{\sigma} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^d) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^d) \\ &= \int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\sigma}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) - \underline{\sigma} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^d) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^d) \\ &= \int_{\Omega \setminus \Sigma} \left( \underline{\sigma} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^d) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^d) \\ &= 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité étant due au fait que  $\underline{\sigma}$  est statiquement admissible. □

En s'appuyant ensuite sur les deux théorèmes de l'énergie, on obtient une formule d'encadrement du minimum de l'énergie

**La formule d'encadrement.** Si le problème d'élastostatique possède une solution, alors le minimum de l'énergie potentielle et le minimum de l'énergie complémentaire sont encadrés par

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}, \quad -\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}^*) \leq -\min_{\mathcal{S}} \mathcal{P}^* = \min_{\mathcal{C}} \mathcal{P} \leq \mathcal{P}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.$$

Cette formule se révèle très utile en pratique pour construire des approximations de la solution. Nous allons l'illustrer dans le paragraphe suivant autour du problème de l'essai de traction.

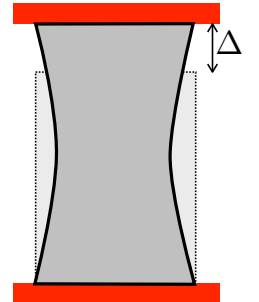
### 3.5.2 Un exemple d'application : l'essai de traction à déplacement latéral bloqué

#### Présentation

On désire mesurer le module d'Young  $E$  d'un matériau linéairement élastique isotrope à l'aide d'un essai de traction en supposant connu son coefficient de Poisson  $\nu$ . Pour cela on fabrique une éprouvette cylindrique de longueur  $L$  et à section circulaire de rayon  $R$ . Dans sa configuration de référence naturelle, l'éprouvette occupe le domaine  $\Omega = S \times (0, L)$  avec

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}.$$

Sa base  $S \times \{0\}$  est attachée à un support rigide fixe et son sommet  $S \times \{L\}$  est fixé au plateau rigide d'une presse.



On impose le déplacement  $\Delta \underline{e}_3$  au plateau de la presse,  $\Delta > 0$ , et on mesure la force  $F$  nécessaire pour cela :

$$F = \int_{S \times \{L\}} \sigma_{33} dS.$$

En dehors du cas particulier où le coefficient de Poisson est nul, la fixation de la base et du sommet à un support rigide fait que le champ des contraintes à l'équilibre n'est ni uniforme, ni uniaxial :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \neq \frac{\Delta}{L} E \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \quad F \neq \frac{\Delta}{L} E \pi R^2.$$

Introduisons *le module d'Young apparent*

$$E_a := \frac{FL}{\pi R^2 \Delta}$$

qui s'interprète comme le rapport entre la contrainte longitudinale moyenne  $F/\pi R^2$  exercée par le plateau de la presse sur l'éprouvette et l'allongement relatif  $\Delta/L$  de l'éprouvette. Par des arguments de dimension, il est possible de montrer que ce module d'Young apparent est proportionnel au module d'Young réel du matériau constitutif de l'éprouvette, avec un coefficient de proportionnalité ne dépendant que du coefficient de Poisson et de l'élancement  $e = L/R$  de l'éprouvette :

$$E_a = k(\nu, e) E.$$

Faute de savoir calculer exactement le coefficient de proportionnalité  $k$ , nous nous proposons d'en construire un encadrement à l'aide des théorèmes de l'énergie.

### Le problème aux limites et ses propriétés variationnelles

Le problème aux limites associé à cet essai de traction entre dans la famille des problèmes-types étudiés précédemment. L'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles est l'espace affine <sup>8</sup>

$$\mathcal{C} = \{ \underline{\underline{\xi}}^* : \underline{\underline{\xi}}^*(\underline{x}) = \underline{0} \text{ sur } S \times \{0\}, \quad \underline{\underline{\xi}}^*(\underline{x}) = \Delta \underline{e}_3 \text{ sur } S \times \{L\} \}$$

dont l'espace vectoriel associé est

$$\mathcal{C}_0 = \{ \underline{\underline{\xi}}^* : \underline{\underline{\xi}}^*(\underline{x}) = \underline{0} \text{ sur } S \times \{0, L\} \}.$$

Comme la base et le sommet sont fixés, tout déplacement de corps rigide est interdit,

$$\mathcal{R} = \{0\}.$$

En négligeant les forces de pesanteur, l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles est l'espace vectoriel  $\mathcal{S}$  suivant

$$\mathcal{S} = \{ \underline{\underline{\sigma}}^* : \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{0} \text{ dans } S \times (0, L), \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \partial S \times (0, L) \}.$$

---

8. L'ensemble  $\mathcal{C}$  n'est pas vide, il contient par exemple le champ de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}^d(\underline{x}) = \Delta \frac{x_3}{L} \underline{e}_3$ .

Comme tous les efforts extérieurs qui sont donnés sont nuls (forces volumiques dans  $\Omega$  et forces surfaciques sur  $\partial S \times (0, L)$ ), le travail des efforts extérieurs donnés est nul

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = 0, \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.$$

Par contre le travail des forces de liaison lui n'est pas nul et s'écrit

$$W_{\text{rea}}(\underline{\sigma}^*) = \Delta \int_S \sigma_{33}^*(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2, \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathcal{S}.$$

En appliquant les résultats généraux d'existence et d'unicité, on voit donc que le problème admet une solution unique  $(\underline{\xi}, \underline{\sigma})$ , tant en déplacements qu'en contraintes. On est dans le cas d'un problème à un paramètre cinématique, le déplacement longitudinal  $\Delta$ . La force généralisée associée n'est rien d'autre que la résultante  $F$  des contraintes de traction sur la section extrême :

$$F = \int_S \sigma_{33}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2.$$

L'énergie potentielle d'un champ  $\underline{\xi}^*$  cinématiquement admissible s'écrit

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda}{2} \text{Tr}(\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*))^2 + \mu \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) \right) dx$$

alors que l'énergie complémentaire d'un champ  $\underline{\sigma}^*$  statiquement admissible s'écrit

$$\mathcal{P}^*(\underline{\sigma}^*) = \int_{\Omega} \left( -\frac{\nu}{2E} (\text{Tr} \underline{\sigma}^*)^2 + \frac{1+\nu}{2E} \underline{\sigma}^* : \underline{\sigma}^* \right) dx - \Delta \int_S \sigma_{33}^*(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2.$$

Comme  $\underline{\sigma}$  minimise l'énergie complémentaire sur  $\mathcal{S}$ , la dérivée de  $\mathcal{P}^*$  en  $\underline{\sigma}$  dans toute direction admissible  $\tau$  est nulle. Comme  $\mathcal{S}$  est un espace vectoriel, on a donc

$$\frac{d}{dh} \mathcal{P}^*(\underline{\sigma} + h\tau) \Big|_{h=0} = 0, \quad \forall \tau \in \mathcal{S},$$

ce qui donne

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \tau dx = \Delta \int_S \tau_{33}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2, \quad \forall \tau \in \mathcal{S}.$$

En prenant  $\tau = \underline{\sigma}$  on en déduit que  $\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \underline{\sigma} dx = F\Delta$  et donc finalement

$$\mathcal{P}^*(\underline{\sigma}) = -\frac{1}{2} F \Delta$$

ce qui est le pendant de la formule de Clapeyron (3.18) qui avait été obtenue dans le cas où  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel, mais qui est obtenue ici en terme de l'énergie complémentaire grâce au fait que  $\mathcal{S}$  est un espace vectoriel<sup>9</sup>. En reportant ce résultat dans la formule générale d'encadrement établie dans la section précédente, on obtient finalement la formule d'encadrement suivante pour le module d'Young apparent

$$\boxed{\forall \underline{\sigma}^* \in \mathcal{S}, \quad -\frac{2L}{\pi R^2 \Delta^2} \mathcal{P}^*(\underline{\sigma}^*) \leq E_a \leq \frac{2L}{\pi R^2 \Delta^2} \mathcal{P}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.} \quad (3.22)$$

Il s'agit maintenant de construire des minorants et des majorants grâce à des choix astucieux de champs de contraintes et de champs de déplacements admissibles.

---

9. Cette formule dit que le travail de liaison à l'équilibre est égal au double de l'énergie élastique à l'équilibre

## Encadrement grossier

Prenons pour champ de déplacement

$$\underline{\xi}^d(\underline{x}) = \Delta \frac{x_3}{L} \underline{e}_3.$$

Il est bien cinématiquement admissible et un calcul immédiat donne

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^d) = \frac{\Delta}{L} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \quad \mathcal{P}(\underline{\xi}^d) = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta^2}{L^2} \pi R^2 L$$

et donc le majorant

$$E_a \leq \lambda + 2\mu.$$

Prenons maintenant pour champ de contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}}^\infty(\underline{x}) = \frac{\Delta}{L} E \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3.$$

Comme il est uniforme et uniaxial, il vérifie les équations d'équilibre volumiques et les conditions à la limites de nullité du vecteur contrainte sur la surface latérale de l'éprouvette. Il est donc statiquement admissible et son énergie complémentaire est donnée par

$$\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}^\infty) = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{L^2} E \pi R^2 L - \Delta \frac{\Delta}{L} E \pi R^2 = -\frac{\pi R^2 \Delta^2}{2L} E.$$

En reportant, on en déduit le minorant

$$E \leq E_a.$$

D'où finalement l'encadrement que l'on qualifera de grossier car il est indépendant de l'élancement de l'éprouvette :

$$\boxed{E \leq E_a \leq \lambda + 2\mu}. \quad (3.23)$$

### Cas où $\nu = 0$

Si le coefficient de Poisson du matériau est nul, alors  $\lambda = 0$  et  $2\mu = E$ . Le minorant et le majorant coïncident, ce qui veut dire que les champs tests  $\underline{\xi}^d$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^\infty$  sont solutions. Le champ des contraintes est donc uniforme et uniaxial, le module d'Young apparent est égal au module d'Young du matériau.

### Cas où $\nu \neq 0$

Dans ce cas, ni  $\underline{\xi}^d$ , ni  $\underline{\underline{\sigma}}^\infty$  ne sont solutions. En effet,  $\underline{\xi}^d$  n'est pas le champ de déplacement solution, car le champ de contrainte associé s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}}^d = \lambda \frac{\Delta}{L} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta}{L} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

et il ne vérifie pas la condition de nullité du vecteur contrainte sur la surface latérale puisque  $\lambda \neq 0$ . De même,  $\underline{\underline{\sigma}}^\infty$  n'est pas solution, car le champ des déformations associé s'écrit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^\infty = -\frac{\nu \Delta}{L} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \frac{\Delta}{L} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3. \quad (3.24)$$

Comme  $\varepsilon_{11}^\infty \neq 0$ , la condition de fixation  $\xi_1 = 0$  en  $x_3 = 0$  ne peut pas être satisfaite. Comme les champs tests ne sont pas solution, les inégalités sont nécessairement strictes dans les estimations obtenues :

$$E < E_a < \lambda + 2\mu.$$

### Affinement du majorant dans le cas $\nu \neq 0$

Considérons le champ de déplacement  $\underline{\xi}^\infty$  suivant

$$\underline{\xi}^\infty(\underline{x}) = \frac{\Delta}{L} (-\nu x_1 \underline{e}_1 - \nu x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3)$$

dont le champ de déformation associé est  $\underline{\varepsilon}^\infty$  donné par (3.24) et le champ de contraintes associé par la relation d'élasticité est  $\underline{\sigma}^\infty$ . Ce champ de déplacement n'est pas cinématiquement admissible car il ne vérifie pas les conditions de fixation en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = L$ . Toutefois on peut penser que si l'éprouvette est élancée, *i.e.* si  $e = L/R$  est grand devant 1, alors le champ des contraintes à l'équilibre loin de la base et du sommet ne devrait pas être très différent de  $\underline{\sigma}^\infty$ . Par conséquent, si nous rendons admissible  $\underline{\xi}^\infty$  en pondérant ses composantes tangentielles par une fonction de  $x_3$  nulle en 0 et en  $L$ , et tendant "rapidement" vers 1 quand on s'éloigne de la base et du sommet, on devrait obtenir un majorant proche de  $E$ . C'est ce que nous nous proposons de montrer dans ce paragraphe.

Introduisons donc la famille de champs cinématiquement admissibles

$$\underline{\xi}^*(x) = -\nu \frac{\Delta}{L} f\left(\frac{x_3}{L}\right) (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) + \frac{\Delta}{L} x_3 \underline{e}_3$$

avec

$$f \in \mathcal{F} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ de classe } C^2, f(0) = f(1) = 0\}. \quad (3.25)$$

Le champ de déformation associé à  $\underline{\xi}^*$  est donné par

$$\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*)(\underline{x}) = \frac{\Delta}{L} \begin{pmatrix} -\nu f\left(\frac{x_3}{L}\right) & 0 & -\frac{\nu}{2} f'\left(\frac{x_3}{L}\right) \frac{x_1}{L} \\ 0 & -\nu f\left(\frac{x_3}{L}\right) & -\frac{\nu}{2} f'\left(\frac{x_3}{L}\right) \frac{x_2}{L} \\ -\frac{\nu}{2} f'\left(\frac{x_3}{L}\right) \frac{x_1}{L} & -\frac{\nu}{2} f'\left(\frac{x_3}{L}\right) \frac{x_2}{L} & 1 \end{pmatrix}$$

Après un calcul qui n'est pas détaillé ici, l'énergie potentielle d'un tel champ peut s'écrire

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = \frac{\pi R^2 \Delta^2}{2L} (1 + J(f)) E$$

avec

$$J(f) = \frac{\alpha}{e^2} \int_0^1 f'(\zeta)^2 d\zeta + \beta \int_0^1 (f(\zeta) - 1)^2 d\zeta \quad (3.26)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux coefficients strictement positifs (dans la mesure où  $\nu \neq 0$ ) ne dépendant que du coefficient de Poisson

$$\alpha = \frac{\nu^2}{4(1 + \nu)}, \quad \beta = \frac{2\nu^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

En reportant dans la formule d'encadrement (3.22), on obtient donc le majorant suivant

$$E_a \leq (1 + J(f))E, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

et on obtiendra donc le meilleur majorant avec des champs de cette forme en minimisant  $J$  sur  $\mathcal{F}$ .

La minimisation de  $J$  sur  $\mathcal{F}$  est un problème classique de calcul des variations dont on rappelle les principales étapes ci-dessous qui conduisent à sa résolution.

#### Minimisation de $J$ sur $\mathcal{F}$ .

1. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  étant strictement positifs, la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe sur  $\mathcal{F}$ .
2. La fonction  $f_*$  de  $\mathcal{F}$  qui la minimise est unique et est celle qui annule la dérivée directionnelle de  $J$ , i.e.

$$f_* \in \mathcal{F}, \quad J'(f_*)(f) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad (3.27)$$

la dérivée directionnelle étant donnée par

$$J'(f_*)(f) := \left. \frac{d}{dh} J(f_* + hf) \right|_{h=0} = \frac{2\alpha}{e^2} \int_0^1 f_*'(\zeta) f'(\zeta) d\zeta + 2\beta \int_0^1 (f_*(\zeta) - 1) f(\zeta) d\zeta. \quad (3.28)$$

3. Par conséquent,  $f_*$  est solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{e^2} f_*''(\zeta) - \beta(f_*(\zeta) - 1) = 0 & , \forall \zeta \in (0, 1) \\ f_*(0) = f_*(1) = 0. \end{cases}$$

Muni de cette caractérisation du minimum, il est facile d'intégrer l'équation différentielle et on obtient

$$f_*(\zeta) = 1 - \frac{\cosh\left((2\zeta - 1)\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{1-2\nu}}\right)}{\cosh\left(\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{1-2\nu}}\right)}.$$

Il reste à calculer le minimum  $J(f_*)$ . On a tout intérêt pour réduire les calculs d'utiliser la propriété variationnelle (3.27) que vérifie le minimiseur. En effet en prenant  $f = f_*$  dans (3.27), on obtient

$$0 = \frac{\alpha}{e^2} \int_0^1 f_*'(\zeta)^2 d\zeta + \beta \int_0^1 (f_*(\zeta) - 1) f_*(\zeta) d\zeta$$

et donc

$$J(f_*) = \beta \int_0^1 (1 - f_*(\zeta)) d\zeta = \beta \frac{\sqrt{1-2\nu}}{e\sqrt{2}} \tanh\left(\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{1-2\nu}}\right).$$

En reportant, on a donc obtenu l'encadrement suivant

$$E \leq E_a \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}\nu^2}{e(1+\nu)\sqrt{1-2\nu}} \tanh\left(\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{1-2\nu}}\right)\right) E.$$

On retrouve que si  $\nu = 0$  le minorant et le majorant coïncident. Sinon, on voit que le majorant tend vers  $E$  lorsque l'élancement de l'éprouvette tend vers l'infini, ce qui était le résultat pressenti.

Deuxième partie

Plasticité





## Chapitre 4

# Introduction au comportement inélastique des matériaux et des structures

### 4.1 Les comportements macroscopiques des matériaux



FIGURE 4.1 – Eprouvettes utilisées dans des essais uni-axiaux : à gauche et au milieu, éprouvette cylindrique et éprouvette plate pour un essai de traction ; à droite, éprouvette cylindrique pour un essai de compression.

Pour identifier le comportement macroscopique d'un matériau, on commence par réaliser des essais uni-axiaux sur éprouvette, *i.e.* des essais où l'on exerce des forces de traction ou de compression dans une direction (soit  $\underline{e}_1$ ). Si l'éprouvette est cylindrique et si la réponse est homogène, alors le tenseur des contraintes sera de la forme  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ , ce qui justifie la terminologie. Le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  ne sera pas en général uniaxial et on notera  $\varepsilon$  sa composante  $\varepsilon_{11}$ . Toutefois, ces propriétés d'uniaxialité et d'homogénéité ne sont pas toujours satisfaites en pratique (ne serait-ce que par la forme

même de l'éprouvette et par la difficulté à imposer des conditions aux limites compatibles). C'est aussi une des préoccupations de l'expérimentateur de s'assurer que les résultats obtenus sont intrinsèques au matériau et pas un effet combiné du matériau, de la géométrie et du chargement. Autrement dit, les résultats d'essais obtenus permettent avant tout de mettre en relation des grandeurs macroscopiques (*i.e.* moyennées en espace) qu'il s'agit de compléter par d'autres analyses afin de s'assurer qu'ils ne sont pas biaisés par des effets structurels.

Munis de ces précautions, commençons par rendre compte des différents types de réponses observées sous chargement monotone en distinguant si besoin est les essais de traction  $\sigma > 0$ , des essais de compression  $\sigma < 0$ . Suivant les matériaux et les conditions de température, on peut obtenir dans un diagramme  $(\varepsilon, \sigma)$  des courbes d'allure variée et dont les ordres de grandeur des déformations ou des contraintes critiques sont très différents. Les réponses-types sont commentées ci-dessous et représentées sur les Figures 4.2 et 4.3, des valeurs étant données à titre indicatif pour fixer les ordres de grandeur :

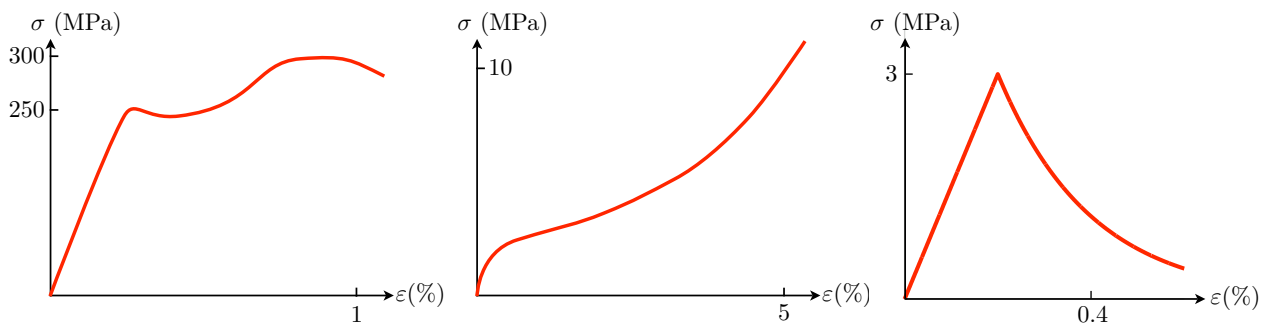


FIGURE 4.2 – Réponses schématiques de différents matériaux dans un essai de traction uniaxiale : à gauche, pour un acier ; au centre, pour un élastomère ; à droite, pour du béton.

1. Pour un acier doux, à température ordinaire, on observe une réponse quasi-linéaire jusqu'à des valeurs de la contrainte autour de 200-250 MPa avec une pente autour de 200 GPa (et donc jusqu'à une déformation d'environ  $10^{-3}$ ), puis la courbe s'infléchit voire redescend légèrement, se stabilise autour d'une valeur pratiquement constante avant de croître à nouveau, de passer par un maximum et de redescendre. Le maximum est atteint pour des valeurs de la déformation de quelques % et une contrainte autour de 300-350 MPa.
2. Pour un élastomère, la courbe contrainte-déformation est toujours fortement non linéaire, d'abord concave puis convexe avec un changement de concavité vers quelques % de déformation. Le module d'Young tangent est beaucoup plus faible que pour un acier.
3. Pour une éprouvette en béton soumise à un essai de traction, on observe une réponse quasi-linéaire jusqu'à une déformation de l'ordre de quelques  $10^{-3}$  et une contrainte de l'ordre de quelques MPa, puis une décroissance rapide de la contrainte (phénomène appelé *adoucissement*).
4. Si l'on réalise un essai de compression sur une éprouvette de béton, l'allure de la courbe contrainte-déformation est sensiblement différente de celle obtenue en traction. La partie linéaire de la réponse est nettement plus importante, puis la courbe s'infléchit progressivement jusqu'à

atteindre une valeur maximale 7 à 8 fois plus élevée que la contrainte maximale en traction. Cette phase de croissance non linéaire de la contrainte correspond au phénomène de *durcissement*. Elle est suivie d'une phase d'adoucissement, mais la décroissance de la contrainte est plus lente qu'en traction, cf Figure 4.3.

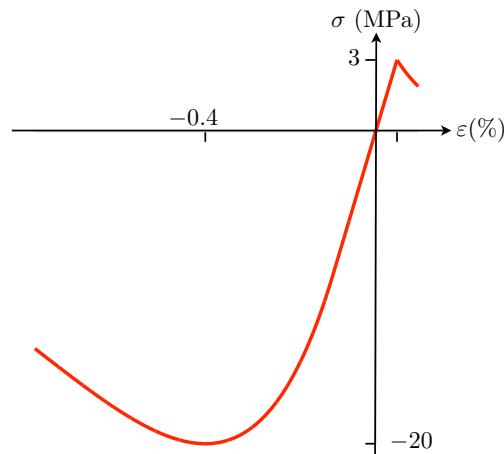


FIGURE 4.3 – Asymétrie du comportement du béton entre la traction et la compression.

Les non-linéarités observées lors de certaines phases de la réponse sous chargement monotone s'avèrent être dues à une irréversibilité du comportement (mais attention, il ne faut pas confondre les deux concepts) et on le constate en faisant des chargements non monotones. Donc, si après une montée en charge jusqu'à un certain niveau de déformation  $\varepsilon_1$  et de contrainte  $\sigma_1$ , on décharge l'éprouvette jusqu'à ramener les contraintes à 0 puis on la recharge jusqu'à un niveau de déformation  $\varepsilon_2$  plus grand (en valeur absolue) que  $\varepsilon_1$ , on observe typiquement les réponses suivantes, cf Figure 4.4 :

1. Pour un acier doux, si  $\varepsilon_1$  correspond au premier plateau de la montée en charge, la décharge est pratiquement linéaire suivant une pente qui est pratiquement identique à celle de la montée en charge. À la fin de la décharge on observe donc une *déformation résiduelle*. C'est ce phénomène qui est appelé *plasticité*. Si l'on recharge, la réponse est pratiquement linéaire avec toujours la même pente jusqu'au niveau  $\varepsilon_1$ , puis la contrainte est à nouveau pratiquement constante et l'on retrouve la courbe de première charge.
2. Pour un élastomère, la décharge est comme la montée en charge fortement non linéaire, la courbe est convexe et la pente diminue progressivement lorsqu'on ramène la contrainte à 0. Contrairement à l'acier, on n'observe pas de déformation résiduelle notable. Ce comportement avec boucle d'hystérésis est appelé *effet Mullins*. La recharge se fait pratiquement suivant la courbe de décharge, ce qui veut dire que cette phase de décharge-recharge est pratiquement réversible (mais non-linéaire). Lorsqu'on dépasse le niveau  $\varepsilon_1$ , on retrouve la courbe de première charge.
3. Pour du béton en compression, la décharge est en première approximation linéaire mais avec une pente plus faible que celle correspondant au début de la montée en charge. Ce phénomène de perte de rigidité est appelé *endommagement*. À la fin de la décharge, il y a une déformation

résiduelle. La recharge est en première approximation réversible jusqu'au niveau  $\varepsilon_1$  précédemment atteint, puis l'on suit la courbe de première charge.

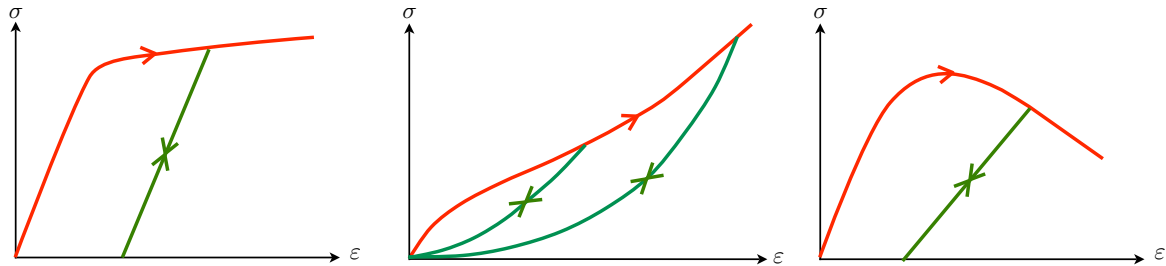


FIGURE 4.4 – Réponses schématiques des différents matériaux dans un cycle de charge-décharge-recharge : à gauche, pour un acier doux ; au centre, pour un élastomère ; à droite, pour un béton en compression.

Toutefois, dans tous les cas la réversibilité des phases de décharge-recharge n'est qu'approximative. Si l'on effectue un grand nombre de cycles, on voit progressivement une dérive qui peut suivre les cas se stabiliser ou non selon le type de matériaux testés et le type de cycles effectués, cf Figure 4.5.

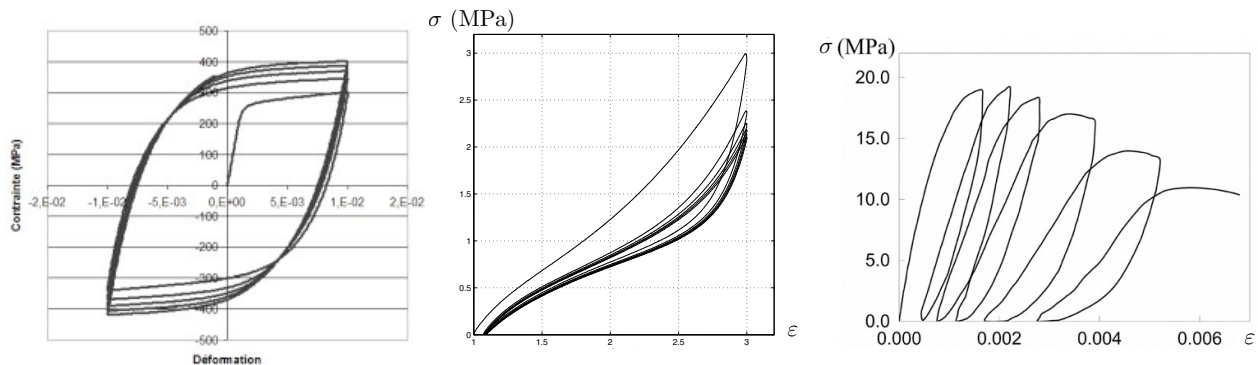


FIGURE 4.5 – Réponses des différents matériaux sous chargement cyclique : à gauche, plasticité cyclique d'un acier ; au milieu, adoucissement cyclique d'un élastomère ; à droite, comportement hystérétique d'un béton en compression

Si l'on revient à un chargement monotone et si on augmente la déformation, l'éprouvette finit par se rompre. Ici encore les mécanismes de rupture observés sont très variés et fortement dépendants du matériau et de l'essai. Par exemple, pour un acier lors d'un essai de traction, on observe avant la rupture un rétrécissement de la section de l'éprouvette (phénomène appelé *striction*), la rupture intervenant ensuite par une séparation en deux de l'éprouvette dans le sens transversal. Pour un composite constitué d'une matrice polymère renforcée par des fibres de carbone dans une direction, la rupture dans un essai de compression (la direction de la compression étant parallèle aux fibres) intervient par une décohésion des fibres. Pour un béton en compression, la rupture se traduit par l'apparition d'un réseau de fissures longitudinales alors que dans un essai de traction elle consiste essentiellement en une fissure unique transversale.



FIGURE 4.6 – Etat final de différentes éprouvettes après un essai uniaxial : à gauche, rupture par striction d’une éprouvette métallique ; au centre, rupture par décohesion des fibres d’un composite à fibres de carbone ; à droite, rupture par fissuration longitudinale d’une éprouvette de béton comprimée.

On peut être tenté de proposer une classification des matériaux ou des comportements à partir de ces différences observées dans des essais uniaxiaux. On parle ainsi de comportement *fragile* ou *ductile*.

Terminologie : Un matériau comme l’acier à température ordinaire qui peut supporter des déformations importantes après la phase initiale élastique est dit *ductile* alors qu’un matériau comme le béton dont la contrainte chute rapidement vers 0 après la phase élastique est dit *fragile*.

Mais cette distinction fragile-ductile ne permet ni de caractériser un matériau donné, ni de classer l’ensemble des matériaux car les réponses présentées précédemment peuvent dépendre fortement de deux paramètres : la température et la *vitesse de déformation*.

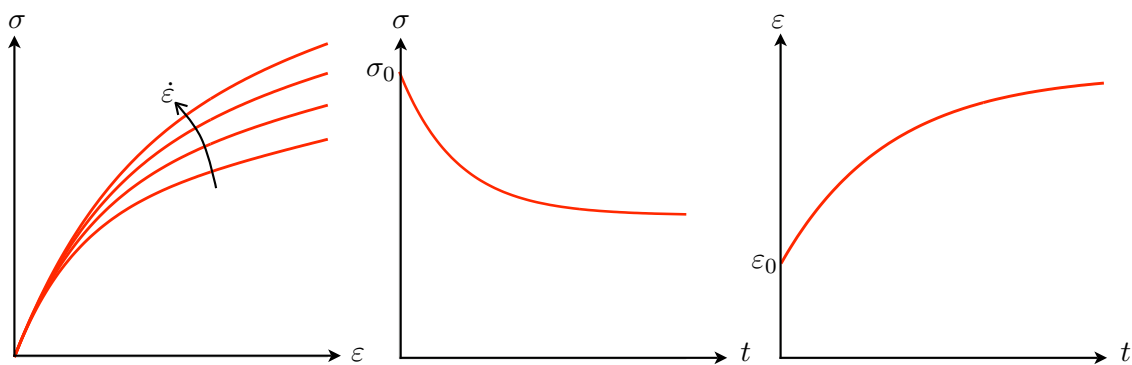


FIGURE 4.7 – Mise en évidence d’un comportement avec viscosité : à gauche, dépendance de la réponse à la vitesse de déformation ; au milieu, relaxation de la contrainte à déformation constante ; à droite, fluage à contrainte constante.

La dépendance à la vitesse de déformation est particulièrement nette chez les polymères. Une façon

de le mettre en évidence est de faire des essais de traction uni-axiaux en pilotant en déformation et en imposant une vitesse de déformation constante. On constate que, plus la vitesse de déformation est grande, plus la contrainte est élevée pour le même niveau de déformation, cf Figure 4.7. Ces effets visqueux se voient aussi en travaillant soit à déformation constante où l'on observe une *relaxation* des contraintes avec le temps, soit à contrainte constante où l'on observe le phénomène de *fluage*, *i.e.* une augmentation de la déformation avec le temps. En combinant des phases où l'on fait varier très rapidement les déformations, phases au cours desquelles la viscosité n'a pas le temps de jouer, avec des phases où l'on maintient les déformations, phases où il y a relaxation des contraintes, on obtient des réponses comme celle qui est représentée dans la Figure 4.8 et qui correspond à un élastomère.

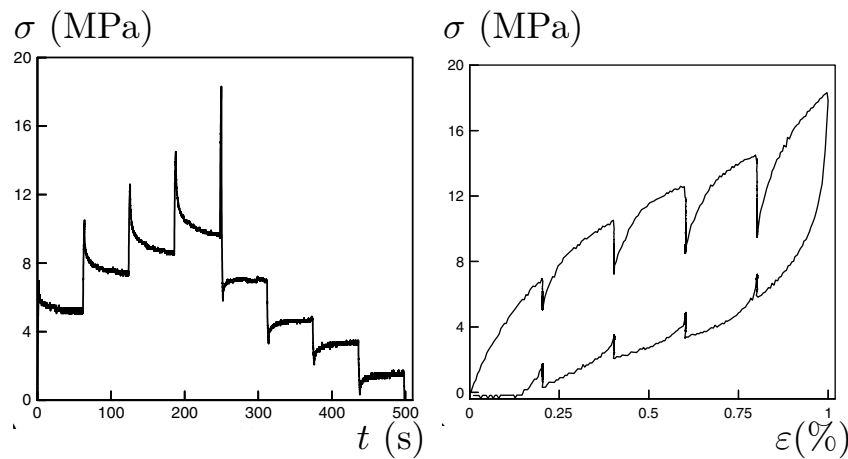


FIGURE 4.8 – Mise en évidence du comportement viscoélastique d'un polymère : à gauche, contrainte uni-axiale  $\sigma$  en fonction du temps ; à droite, réponse dans le diagramme  $(\varepsilon, \sigma)$

Il faut noter toutefois que tous les comportements irréversibles mis en évidence auparavant (les déformations résiduelles et la plasticité cyclique pour les métaux, l'effet Mullins et l'adoucissement cyclique des contraintes pour les polymères, la perte progressive de rigidité et le comportement hystérétique des bétons) ne sont pas des effets visqueux. Ils peuvent être modélisés dans un cadre où le comportement est indépendant des vitesses de sollicitation.

La température est un paramètre essentiel qui peut changer radicalement le comportement d'un matériau. Ainsi, un métal est ductile à température ordinaire, mais devient fragile à basse température. Cette transition fragile-ductile, longtemps méconnue ou mésestimée, est d'ailleurs à la base de plusieurs accidents célèbres (cf la fin du chapitre). Pour un polymère, la température de transition vitreuse correspond pratiquement à un changement d'état, le polymère passant (progressivement) lorsqu'on augmente la température d'un état dit vitreux à un état dit caoutchouteux. Dans le même temps, le module d'Young peut chuter dans un rapport 100. De façon générale, plus la température est élevée et plus les effets visqueux prennent de l'importance.

Les mécanismes microscopiques associés : L'explication de ces différents comportements peut être cherchée à une échelle plus fine en observant les mécanismes microscopiques associés. À chaque fois, le mot clé est *défaut* : la plasticité des métaux est due aux mouvements des *dislocations* (défaut du réseau cristallin) ; le comportement non linéaire et irréversible des élastomères est dû à l'étirement des chaînes et aux modifications des liaisons faibles entre les noeuds du réseau ; la perte de rigidité progressive et le comportement hystérétique du béton sont liés au développement et au jeu d'ouverture et de fermeture de réseaux de microfissures.

Toutefois, l'objectif de ce cours n'est pas d'établir un lien précis entre microstructure et propriétés macroscopiques, mais de modéliser directement au niveau macroscopique les comportements observés afin de disposer d'outils de dimensionnement des structures mécaniques. Il existe des cours spécialisés dédiés à l'étude des matériaux aux "petites échelles", par exemple "PHY556 : Bases physiques des comportements mécaniques des solides".

## 4.2 La fissuration et la rupture des structures

La fissuration est un défaut qui touche tous les matériaux et toutes les structures à toutes les échelles de temps et d'espace. On ne peut pas l'éviter, mais il faut absolument la contrôler par des essais *in situ* réguliers, mais aussi en développant des modèles prédictifs de plus en plus sophistiqués qui permettent de faire des simulations numériques de plus en plus réalistes. Les enjeux socio-économiques sont considérables et c'est un des domaines de la recherche en Mécanique des Solides qui est le plus actif et où les concepts et les outils ont le plus évolué durant ces deux dernières décennies. La présentation des bases de cette branche de la Mécanique des Solides que l'on appelle Mécanique de la Rupture fera l'objet de la deuxième partie de ce cours. On se propose dans cette section d'illustrer à partir de quelques exemples l'ampleur du phénomène.

Notons tout d'abord que l'on ne peut pas expliquer les réponses des matériaux dans les essais uniaxiaux présentés précédemment sur toute ou partie de la plage de sollicitation sans invoquer la présence et le développement de fissures dans les éprouvettes. C'est le cas pour le béton en traction où la phase d'adoucissement correspond à une fissuration transverse rapide de l'éprouvette. Il est d'ailleurs clair que durant cette phase la réponse de l'éprouvette n'est pas homogène et que les grandeurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$  mesurées ne sont plus caractéristiques du comportement du matériau seul mais sont des grandeurs moyennes. L'éprouvette doit alors être considérée comme une structure avec hétérogénéité de la déformation (sans parler de l'hétérogénéité structurelle du "matériau" béton, les granulats jouant un rôle essentiel dans le développement de la micro-fissuration). C'est encore le cas pour le béton sous compression car on ne peut pas expliquer les boucles d'hystérésis et la dissymétrie du comportement par rapport à la traction sans invoquer les phénomènes d'ouverture et de fermeture des micro-fissures accompagnés de glissement et frottement entre les lèvres en contact. Mais c'est également vrai pour les métaux dans la phase ultime de striction où des micro-cavités coalescent pour former la fissure transverse finale. Ici aussi, durant la phase de striction, l'éprouvette n'est plus homogène. La décohérence des fibres est un des mécanismes d'endommagement fondamentaux pour les composites, la fissuration se développant alors de façon privilégiée le long des interfaces fibre-matrice.

La fissuration touche toutes les structures en service conduisant parfois à des ruptures brutales sans préavis. L'exemple le plus célèbre est celui des cargos, appelés Liberty ships, construits durant la Seconde Guerre mondiale et dont 200 sur les 5000 ont subi des dommages importants, certains rompant





FIGURE 4.9 – Le Schenectady, un des liberty ships entièrement rompus

brutalement et entièrement tel le Schenectady, cf Figure 4.9. L'explication avancée est double : d'une part la navigation en Mer du Nord où la *température* de l'eau est *plus froide* que dans l'Atlantique, d'autre part l'urgence de la situation qui a conduit à construire ces bateaux en série à partir de panneaux modulaires *soudés* et non plus rivetés (un bateau était ainsi assemblé en moins d'un mois). La baisse de température a fait que le métal est passé de ductile à fragile avec une chute sensible de la ténacité. C'est à cette occasion qu'a été découverte la notion de température de transition fragile-ductile grâce en particulier aux travaux de G. R. Irwin, ingénieur de l'US Naval Research Laboratory, qui développa à l'occasion certains des concepts de base de la Mécanique de la Rupture Fragile.



FIGURE 4.10 – Le pont de Sully-sur-Loire après sa rupture brutale du 16 janvier 1985

Un autre exemple de rupture brutale d'une structure en acier est celui du pont suspendu de Sully-sur-Loire dont le tablier s'est effondré sur toute sa longueur dans le lit du fleuve le 16 janvier 1985, cf Figure 4.10. Là encore, c'est la baisse de la température (environ  $-20^{\circ}\text{C}$  le matin de l'accident) qui a fragilisé les aciers au niveau des suspentes et qui a provoqué une chute de la ténacité (la ténacité est

pratiquement divisée par 3 quand la température passe de  $+20^{\circ}\text{C}$  à  $-20^{\circ}\text{C}$ ).



FIGURE 4.11 – Rupture d'un rail sur la ligne D du RER, de au gel en Octobre 2003

Le secteur des transports terrestres n'est pas épargné par le phénomène. La figure 4.11 montre la rupture d'un rail sur la ligne D du RER en Octobre 2003. C'est encore les conditions climatiques qui sont à la base de la rupture. Du fait de la baisse de la température, le rail voulait se contracter (couplage thermo-mécanique caractérisé par le coefficient de dilatation), mais cette contraction étant empêchée par la fixation du rail sur le ballast, des contraintes thermiques de traction ont été engendrées, proportionnelles à la baisse de température. Pour peu que le rail contenait un petit défaut, ces contraintes ont été suffisantes pour provoquer la rupture brutale du rail.

Toutes les structures du Génie Civil sont conçues et dimensionnées en fonction du risque de rupture par fissuration. La faible résistance à la traction du béton fait que dans les calculs simplifiés, les parties tendues sont ignorées, seules les parties comprimées sont prises en compte dans le dimensionnement. C'est aussi cette faiblesse en traction et la dissymétrie traction-compression qui sont à la base du développement du béton armé et du béton précontraint. Le béton armé est utilisé dans les parties des structures (dalles, poutres ou voiles) soumises à de la flexion et où une partie du béton sera en traction et l'autre en compression. Les armatures (en général en acier) sont placées côté tendu de façon à reprendre les efforts de traction. Le principe du béton précontraint dont l'inventeur est Eugène Freyssinet (X1899) est de couler du béton autour d'une armature d'acier pré-tendue (précontrainte par pré-tension), ce qui aura pour effet, lorsqu'on relâchera la tension dans les câbles après la prise du béton, de mettre le béton en compression. On souhaite ainsi que, lorsque cette dalle précontrainte se trouvera en service, le béton ne travaillera jamais en traction. Il existe une variante du procédé de mise en précontrainte, appelée précontrainte par post-tension qui consiste à couler du béton autour de câbles d'acier insérés dans des gaines (de façon à empêcher l'adhérence entre l'acier et le béton), de tendre les câbles avant de les fixer au béton et enfin de relâcher le tout. À la fin du procédé, le béton se retrouve également en compression. Grâce à ce procédé de béton précontraint, on peut construire des travées de pont de grandes dimensions. Le record en France est détenu par le pont Châteaubriand sur la Rance, pont en arc construit en 1991, et dont l'arche fait 260m ; le record mondial est détenu depuis 1997 par le pont de Wanxian en Chine, également pont à arc dont la portée est de 420m.

Les géo-matériaux sont des matériaux fragiles, comme le béton, qui supportent mal les contraintes de traction. Comme pour le rail du RER, des chocs thermiques peuvent engendrer des tractions assez



FIGURE 4.12 – Le pont Châteaubriand, pont en béton précontraint ayant la plus grande portée en France

fortes pour provoquer leur fissuration. C'est le cas par exemple dans les régions volcaniques où, après une éruption, les laves se solidifient tout en se fissurant lors de leur refroidissement. Ces fissures se développent suivant un réseau quasi-périodique formant des cylindres, appelés *colonnes ou orgues basaltiques*, dont les sections sont des polygones réguliers. Ainsi en Irlande du Nord, à la Chaussée des Géants, on peut observer un réseau de 40 000 colonnes hexagonales verticales juxtaposées. S'il est admis que c'est la contraction thermique qui est à la base de cette fissuration, il n'existe pas aujourd'hui de modèles quantitatifs capables d'expliquer la forme et la taille du réseau périodique.



FIGURE 4.13 – Détails des colonnes basaltiques de la Chaussée des Géants en Irlande du Nord.

Les fissures sont une des hantises dans le secteur du nucléaire. C'est pourtant ce phénomène qui est au centre de l'incident de la centrale de Civaux le 12 mai 1998. Alors que le réacteur était à l'arrêt, une fuite d'eau d'environ  $30\text{m}^3/\text{h}$  s'est produite en raison d'une fissure sur un coude de la tuyauterie du circuit de refroidissement à l'arrêt du réacteur. Les expertises ont montré que la fissure d'une vingtaine de centimètres traversant l'épaisseur du tube au voisinage d'une soudure était elle-même au centre d'un réseau de micro-fissures situées en peau interne du tuyau dans le revêtement en acier inoxydable, cf Figure 4.14. Ce phénomène de faïençage thermique est dû au mélange des eaux chaudes et froides

à l'intérieur du circuit qui au niveau du coude a engendré des turbulences. Ces turbulences ont elles-mêmes induit un chargement thermique cyclique de l'acier qui a fini par développer une fissuration par fatigue. Ce réseau de micro-fissures a affaibli la soudure qui a fini par céder. Cet incident a été considéré comme *générique* et, après un arrêt du réacteur de plusieurs mois, a nécessité de revoir la conception du circuit de refroidissement sur tous les réacteurs de ce type (réacteur à eau pressurisée de 1450MW).

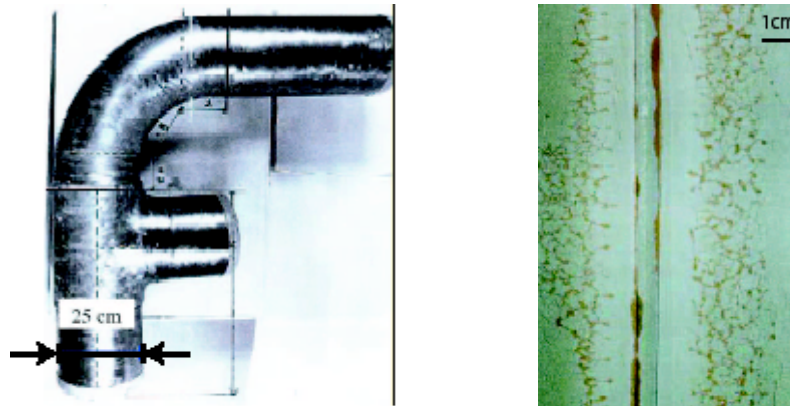


FIGURE 4.14 – Faïençage thermique observé à Civaux dans le tuyau incriminé lors de l'incident du 12 mai 1998.

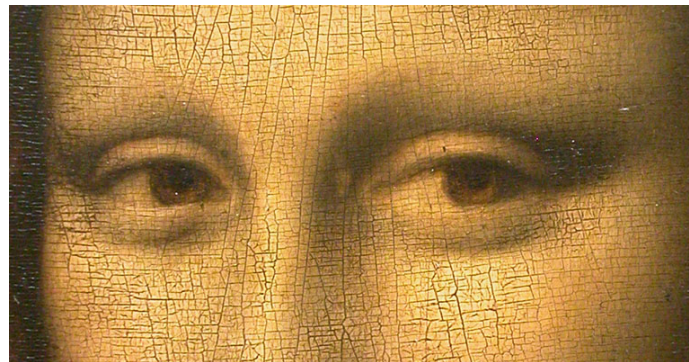


FIGURE 4.15 – Faïençage de la peinture dans le portrait de la Joconde.

On retrouve le phénomène de faïençage dans les tableaux de peinture. Le mécanisme de formation de ces micro-fissures est tout à fait similaire à celui qui provoque la rupture d'un rail ou les colonnes basaltiques. En séchant la peinture a tendance à se contracter, cette contraction est partiellement empêchée par la toile et la fine couche de peinture se craquelle. C'est évidemment un phénomène qui inquiète tous les conservateurs de musée car cela met en péril à terme le patrimoine culturel. Paradoxalement, on peut aussi tirer parti de ce défaut pour authentifier les œuvres d'art. L'idée est que comme la morphologie des craquelures dépend de l'enduit, des coloris, de la toile et de l'âge du tableau, elle peut servir de signature de l'œuvre. Des travaux de recherche sont entrepris dans ce but-là.

## 4.3 Les modèles rhéologiques

### 4.3.1 Les éléments de base

Toutes les lois de comportement usuelles des matériaux peuvent être schématisées à l'aide de modèles rhéologiques correspondant à des assemblages en série ou en parallèle de *ressorts*, de *patins*, d'*amortisseurs* et de *masses*<sup>1</sup>. Examinons un par un chacun de ces éléments. Tous les objets étant astreints à se déplacer sur un axe prédéfini, leur position est caractérisée par un scalaire et les forces qu'ils subissent sont implicitement orientées suivant cet axe et donc caractérisées également par un scalaire.

1. *La masse*. Si on exerce une force  $\sigma$  sur une masse (ponctuelle)  $m$ , l'évolution de sa position  $\varepsilon$  au cours du temps est régie par le principe fondamental de la dynamique qui s'écrit ici

$$m\ddot{\varepsilon} = \sigma,$$

$\ddot{\varepsilon}$  représentant l'accélération de la masse.

2. *Le ressort*. L'extrémité  $A$  du ressort est fixée, l'extrémité  $B$  est susceptible de se déplacer et on repère sa position courante par rapport à sa position lorsque le ressort est dans son état naturel, libre de force. On note  $\varepsilon$  l'allongement du ressort, *i.e.* la différence entre la position actuelle de l'extrémité  $B$  et sa position naturelle. En supposant que le ressort a un comportement élastique linéaire et en notant  $E$  sa raideur, la tension  $\tau$  du ressort est reliée à  $\varepsilon$  par

$$\tau = E\varepsilon.$$

On peut évidemment envisager des relations tension-allongement non linéaires  $\tau = f(\varepsilon)$ . On

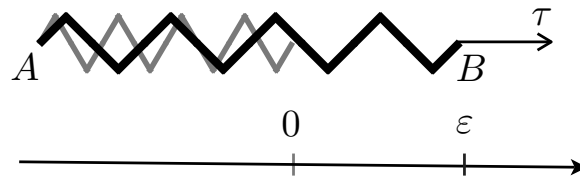


FIGURE 4.16 – Le modèle rhéologique de ressort

peut même rendre compte des concepts de rupture en introduisant un critère de rupture du ressort, par exemple en imposant que le ressort casse lorsque sa tension atteint une valeur critique  $\sigma_c$  ou de façon équivalente lorsque son allongement atteint une valeur critique  $\varepsilon_c$ .

3. *Le patin frottant*. Du fait du frottement avec son support, le patin ne se déplace que si la force que l'on exerce sur lui est suffisante pour vaincre la force de frottement  $-\tau$  engendrée par le contact du patin avec son support (le signe  $-$  est introduit de façon à ce que  $\tau$  représente la force qu'exerce le patin sur son support). Lorsqu'il se déplace la force de frottement  $\tau$  est égale

---

1. Les *masses* servent à rendre compte des effets d'inertie. Dans la suite de ce cours, on se placera le plus souvent dans un cadre quasi-statique ce qui revient à négliger les masses et donc les forces d'inertie. Cette hypothèse simplificatrice a des conséquences importantes d'un point de vue qualitatif sur la réponse du système.

à  $\pm\sigma_c$ , le signe dépendant du sens de glissement. De façon précise, si on note  $\varepsilon$  le déplacement du patin depuis une position de référence, la loi de frottement s'écrit

$$|\tau| \leq \sigma_c, \quad \tau = \begin{cases} +\sigma_c & \text{si } \dot{\varepsilon} > 0 \\ -\sigma_c & \text{si } \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases},$$

ce qui peut aussi se condenser en

$$|\tau| \leq \sigma_c, \quad \tau \dot{\varepsilon} = \sigma_c |\dot{\varepsilon}|,$$

$\dot{\varepsilon}$  représentant la vitesse de déplacement du patin. La force critique  $\sigma_c$  doit être considérée

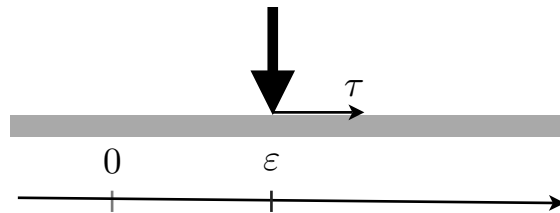


FIGURE 4.17 – Le modèle rhéologique de patin frottant

comme une caractéristique du contact frottant entre le patin et son support, à identifier expérimentalement. Comme dans le cas du ressort, on a fait ici le choix le plus simple en supposant que les deux sens de glissement sont symétriques et que  $\sigma_c$  est une constante. Rien n'interdit d'envisager des seuils de glissement différents selon que le patin glisse vers la droite ou vers la gauche ou même d'envisager des seuils qui évoluent avec le temps. C'est même nécessaire si l'on veut modéliser des phénomènes d'usure.

4. *L'amortisseur*. L'action d'une force  $\sigma$  sur un amortisseur ne modifie pas instantanément la position de ce dernier, mais uniquement sa vitesse. De façon précise, si on note  $\varepsilon$  la variation de position d'un amortisseur par rapport à une position de référence et  $\dot{\varepsilon}$  sa vitesse de déplacement, la relation force exercée–vitesse de déplacement s'écrit

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon}$$

où le coefficient de viscosité  $\mu$  est caractéristique de l'amortisseur et déterminé expérimentalement. On peut ici encore envisager des lois plus sophistiquées (non linéaires, à viscosité variable, ...).

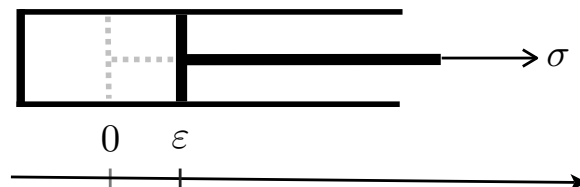


FIGURE 4.18 – Le modèle rhéologique d'amortisseur

A partir de ces “briques” élémentaires, on peut en les assemblant construire des modèles capables de rendre compte, au moins qualitativement, du comportement observé des matériaux. Nous allons, à titre d’illustration, étudier quelques assemblages simples et le lecteur est invité à en envisager des plus complexes, certains étant suggérés à titre d’exercices. Les règles d’assemblage sont les suivantes :

- *En série*, les déplacements relatifs entre éléments de la série s’additionnent alors que les forces se transmettent d’un élément à l’autre ;
- *En parallèle*, les déplacements de chaque élément sont égaux alors que les forces de chaque élément s’additionnent ;

#### 4.3.2 Quelques assemblages simples avec masses

1. *ressort–masse*. Si l’on met en série un ressort et une masse en fixant l’extrémité libre du ressort et en exerçant une force dépendant du temps  $\sigma(t)$  sur la masse, l’équation du mouvement de la masse s’écrit

$$m\ddot{\varepsilon} + E\varepsilon = \sigma,$$

la masse étant soumise à la force exercée  $\sigma$  et à la force de rappel du ressort  $-E\varepsilon$ . Quand la force exercée  $\sigma$  est constante, la masse oscille autour de sa position d’équilibre  $\varepsilon_{\text{eq}} = \sigma/E$  avec une pulsation  $\omega = \sqrt{E/m}$ .

2. *amortisseur–masse*. Mettons une masse à l’extrémité mobile d’un amortisseur et exerçons une force  $\sigma(t)$  sur la masse. L’amortisseur exerce sur la masse une force égale à  $-\mu\dot{\varepsilon}$  et l’équation du mouvement de la masse est donc

$$m\ddot{\varepsilon} + \mu\dot{\varepsilon} = \sigma.$$

**Exercice 4.1.** Donner la réponse d’un assemblage amortisseur–masse lorsqu’on impose brusquement une force  $\sigma_0$  à l’instant 0, alors que l’assemblage est au repos, puis que l’on maintient la force constante.

3. *patin–masse*. Associons une masse et un patin, tous deux initialement au repos dans une position prise pour référence. Si nous exerçons sur l’assemblage, à partir de l’instant initial, une force  $\sigma$  dépendant du temps, le mouvement est régi par le système suivant

$$m\ddot{\varepsilon} = \sigma - \tau, \quad |\tau| \leq \sigma_c, \quad \tau\dot{\varepsilon} = \sigma_c |\dot{\varepsilon}|$$

complété par les données initiales  $\varepsilon(0) = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}(0) = 0$ .

**Exercice 4.2.** Donner la réponse d’un assemblage patin–masse lorsqu’on impose brusquement une force  $\sigma_0 > 0$  à l’instant 0, alors que l’assemblage est au repos, puis que l’on maintient la force constante. On distinguera les cas  $\sigma_0 < \sigma_c$ ,  $\sigma_0 = \sigma_c$  et  $\sigma_0 > \sigma_c$ .

#### 4.3.3 Quelques assemblages simples sans masse

1. *ressort–amortisseur en série*. On fixe l’extrémité d’un ressort, on met en série un amortisseur à l’autre extrémité et on impose une force  $\sigma$  sur l’amortisseur. Si l’on note  $\varepsilon^e$  l’allongement du ressort et  $\varepsilon^v$  le déplacement relatif de l’amortisseur, le déplacement du point d’application

de la force  $\varepsilon$  est donné par  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$ . En écrivant les lois de comportement du ressort et de l'amortisseur, on obtient

$$\sigma = E\varepsilon^e, \quad \dot{\varepsilon}^v = \sigma/\mu.$$

En dérivant la première relation et en éliminant  $\dot{\varepsilon}^v$  grâce à la deuxième, on obtient finalement l'équation différentielle suivante régissant les évolutions de l'assemblage :

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\mu}\sigma = E\dot{\varepsilon}.$$

Ce modèle est appelé *modèle viscoélastique de Maxwell*.

2. *ressort-amortisseur en parallèle*. On note  $\sigma$  la force exercée sur l'ensemble et  $\varepsilon$  l'allongement du ressort et le déplacement de l'amortisseur. La tension dans le ressort étant  $\sigma_1$  et la force qui s'exerce sur l'amortisseur étant  $\sigma_2$ , on a  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ . En écrivant les lois de comportement du ressort et de l'amortisseur, on obtient  $\sigma_1 = E\varepsilon$  et  $\sigma_2 = \mu\dot{\varepsilon}$ . En reportant dans la relation précédente, on obtient finalement l'équation régissant les évolutions de l'assemblage :

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}.$$

Ce modèle est appelé *modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt*.

3. *assemblages à bases de ressorts et de patins*. Ces assemblages avec des patins et des ressorts en série ou en parallèle permettent de simuler des comportements élasto-plastiques ou de façon plus générale des comportements hystérétiques indépendants des vitesses. Nous étudierons les plus simples d'entre eux au chapitre suivant.

**Exercice 4.3.** Comparer les réponses prévues par les modèles viscoélastiques de Maxwell et de Kelvin-Voigt dans les conditions suivantes :

1. Essai à vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  imposée constante ;
2. Essai de relaxation où la déformation  $\varepsilon$  est maintenue constante ;
3. Essai de fluage où la contrainte  $\sigma$  est maintenue constante.





## Chapitre 5

# Le comportement élasto-plastique

Ce chapitre est consacré au comportement élasto-plastique qui est basé sur les concepts de déformation plastique, de domaine d'élasticité, de seuil de plasticité, d'écrouissage, de loi d'écoulement plastique, d'irréversibilité et de dissipation d'énergie. On commence par présenter ces notions sur les modèles rhéologiques construits par assemblage de ressorts et de patins frot-tants. Ceci permet de se familiariser avec ces lois de comportement qui sont régies par des inégalités qui traduisent les notions de seuil et d'irréversibilité. On peut ainsi facilement rendre compte du comportement élasto-plastique "parfait" ainsi que de la notion d'écrouissage. On passe ensuite di-rectement au milieu continu tridimensionnel. Comme il existe une très grande latitude quant à la construction des lois de comportement élasto-plastiques, on restreint la généralité en s'appuyant sur le postulat énergétique de Drucker-Ilyushin. On montre alors que ce postulat est lui-même équivalent (en l'absence d'écrouissage) au principe du travail plastique maximal de Hill qui joue un rôle fondamental dans l'établissement des propriétés qualitatives des modèles d'élasto-plasticité. Cela conduit à la notion de *matériau standard* pour lesquels le domaine de réversibilité est *convexe* et la loi d'écoulement de la déformation plastique suit la *règle de normalité*. On étudie ensuite plus particulièrement deux modèles de cette famille, l'un basé sur le critère de Von Mises et l'autre sur le critère de Tresca. On fait fonctionner ces deux lois de comportement sur des essais simples uni-axiaux ou bi-axiaux, ce qui permet de les comparer et de mettre en évidence un certains nombre de phénomènes liés à l'irréversibilité et à la règle de normalité. On montre enfin comment on peut les identifier expérimentalement.

## 5.1 Introduction

Avant d'aborder le comportement élasto-plastique des matériaux, il est bon d'étudier les modèles rhéologiques à base d'assemblages de patins et de ressorts. Ils contiennent tous les concepts fondamentaux que l'on retrouvera dans l'étude des matériaux réels et permettent une première découverte de ce type de comportement sans faire appel à un formalisme lourd. Il est absolument essentiel de décortiquer ces "petits modèles de dimension 0" et de s'en imprégner avant d'aborder le cas général.

### 5.1.1 Le modèle rhéologique patin-ressort

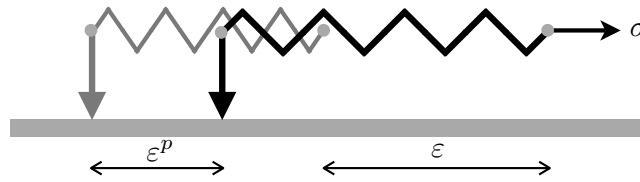


FIGURE 5.1 – Assemblage patin-ressort. En gris : la configuration de référence naturelle ; en noir : la configuration déformée.

Considérons un assemblage patin-ressort en série. Toutes les masses sont négligées et on raisonne donc en quasi-statique. Notons  $\varepsilon$  le déplacement de l'extrémité libre du ressort et  $\varepsilon^p$  le déplacement commun du patin et de l'extrémité reliée du ressort. La raideur du ressort étant  $E$ , si l'extrémité libre du ressort est soumise à une force  $\sigma$ , cette force est aussi la tension du ressort et elle est donc reliée à  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^p$  par

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (5.1)$$

Comme  $\sigma$  est aussi la force qu'exerce le patin sur le support, la loi d'évolution du glissement du patin s'écrit

$$|\sigma| \leq \sigma_c, \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}^p \geq 0 & \text{si } \sigma = +\sigma_c \\ \dot{\varepsilon}^p = 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_c \\ \dot{\varepsilon}^p \leq 0 & \text{si } \sigma = -\sigma_c \end{cases} \quad (5.2)$$

Étudions la réponse de l'assemblage lorsqu'on contrôle la position  $\varepsilon$  de l'extrémité libre du ressort.

**Chargement monotone.** L'ensemble étant dans sa position de référence naturelle, *i.e.*  $\varepsilon = \varepsilon^p = 0$ , on fait croître progressivement  $\varepsilon$  qui va jouer le rôle de paramètre cinématique. Il s'agit de trouver  $\sigma$  et  $\varepsilon^p$  en fonction de  $\varepsilon$ . On va voir que (5.1) et (5.2) permettent de les déterminer de façon unique sous réserve que l'on suppose que la réponse varie continûment. On peut distinguer deux phases, cf Figure 5.2 :

1. *Phase de mise en tension du ressort.* Comme  $\sigma = 0$  et  $\varepsilon^p = 0$  quand  $\varepsilon = 0$  et que  $\sigma$  varie continûment, on aura  $|\sigma| < \sigma_c$  pour  $\varepsilon$  assez petit. Durant cette phase,  $\varepsilon^p$  reste nul en vertu de (5.2) et on a donc  $\sigma = E\varepsilon$ . Ceci reste vrai tant que  $\varepsilon < \sigma_c/E$ .

2. *Phase de glissement vers la droite.* Quand  $\varepsilon = \sigma_c/E$ , on a par continuité  $\sigma = \sigma_c$  et  $\varepsilon^p = 0$ . Le seuil de glissement vers la droite est donc atteint. Montrons que  $\sigma$  reste bloquée à  $\sigma_c$  quand  $\varepsilon$  dépasse  $\sigma_c/E$ .<sup>1</sup>

Par contradiction. Supposons que  $\sigma < \sigma_c$  à un instant où  $\varepsilon_1 \geq \sigma_c/E$ , le déplacement du patin valant  $\varepsilon^p$ . Par continuité ce sera encore vrai dans un intervalle  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ . Prenons  $\varepsilon_0$  le plus petit possible. Comme  $\sigma = \sigma_c$  quand  $\varepsilon = \sigma_c/E$ , on a nécessairement  $\sigma = \sigma_c$  quand  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Dans l'intervalle  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ ,  $\varepsilon^p$  n'évolue pas puisque le seuil de glissement n'est pas atteint (mais il aurait pu évoluer avant). On devrait donc avoir  $\sigma_c = E(\varepsilon_0 - \varepsilon^p)$  et d'autre part  $\sigma_c > E(\varepsilon_1 - \varepsilon^p)$ , ce qui est impossible. Donc  $\sigma = \sigma_c$  pour tout  $\varepsilon \geq \sigma_c/E$ .

En reportant dans (5.1), on obtient  $\varepsilon^p = \varepsilon - \sigma_c/E$  et donc le patin glisse vers la droite alors que l'allongement du ressort reste fixe.

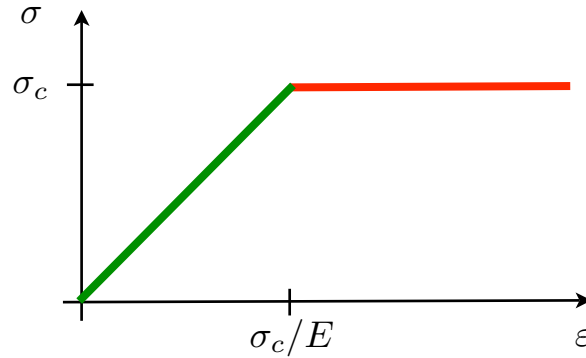


FIGURE 5.2 – Réponse de l'assemblage patin-ressort sous chargement monotone. En vert : phase de mise en tension du ressort ; en rouge : phase de glissement du patin.

**Décharge.** Envisageons maintenant une décharge, *i.e.* une diminution de  $\varepsilon$ . Notons  $\varepsilon_*$  et  $\varepsilon_*^p$  les positions des deux extrémités du ressort à la fin de la montée en charge précédente. Elles sont reliées par  $\varepsilon_*^p = \varepsilon_* - \sigma_c/E$ . On peut également distinguer deux phases, cf Figure 5.3 :

1. *Phase de blocage du patin.* Montrons qu'au début de la décharge le patin se bloque,  $\varepsilon^p$  restant à la valeur  $\varepsilon_*^p$ .

Toujours par contradiction en utilisant la continuité de la réponse. Le patin ne peut pas glisser vers la droite car on aurait alors  $\varepsilon = \sigma_c/E + \varepsilon^p$  et donc  $\varepsilon$  devrait croître, ce qui contredit l'hypothèse de décharge. Comme  $\sigma = \sigma_c$  à la fin de la montée en charge, par continuité il reste proche de  $\sigma_c$  au début de la décharge et donc le patin ne peut pas glisser vers la gauche puisque cela exige que  $\sigma = -\sigma_c$ . Donc le patin reste bloqué au début de la décharge.

Durant cette phase on a donc  $\varepsilon^p = \varepsilon_*^p$  et  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_*^p)$ . Donc  $\sigma$  diminue progressivement. Il s'annule quand  $\varepsilon = \varepsilon_*^p$  ce qui permet d'interpréter  $\varepsilon_*^p$  comme le déplacement résiduel du patin lorsqu'on a remis à 0 la tension du ressort. Cette phase prend fin quand  $\sigma = -\sigma_c$  et donc quand  $\varepsilon = \varepsilon_* - 2\sigma_c/E$ .

1. Ce type de raisonnement revient de façon récurrente. Nous l'explicitons ici, mais très vite nous l'omettrons.

2. *Phase de glissement vers la gauche.* Quand  $\varepsilon$  devient inférieur à  $\varepsilon_* - 2\sigma_c/E$  et continue à décroître,  $\sigma$  reste bloqué à  $-\sigma_c$ .

**Exercice 5.1.** Montrer cette propriété en s'inspirant de la démonstration faite lors de la phase de glissement à droite.

On a donc  $\sigma = -\sigma_c$  et  $\varepsilon^p = \varepsilon + \sigma_c/E$  durant cette phase. Le patin glisse vers la gauche.

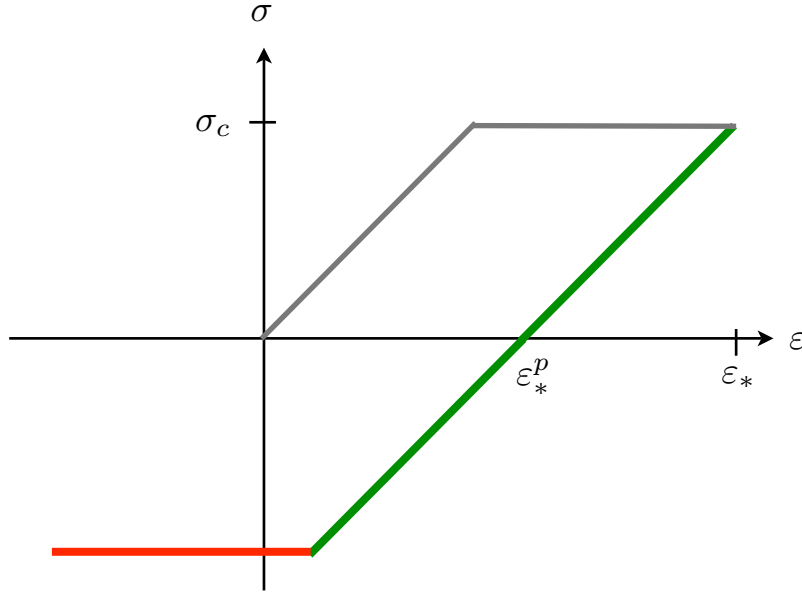


FIGURE 5.3 – Réponse de l’assemblage patin-ressort lors de la décharge. En vert : phase de blocage du patin ; en rouge : phase de glissement du patin vers la gauche.

On pourrait continuer ainsi et envisager une nouvelle charge, *i.e.* une nouvelle croissance de  $\varepsilon$ , puis d’autres changements de sens de chargement. En fait tout peut se résumer en deux grandes propriétés qui tournent autour de la notion de réversibilité dont nous donnons une définition intuitive

**Définition de la réversibilité de la réponse.** On dit que la réponse permettant de déterminer l’évolution de  $\sigma$  à partir de la donnée de l’évolution de  $\varepsilon$  est réversible lorsqu’elle ne dépend pas du sens de variation de  $\varepsilon$ . Lorsque cette réponse dépend du sens de variation de  $\varepsilon$ , elle est dite irréversible.

Les deux grandes propriétés caractérisant le comportement du patin-ressort sont : 1. Réversibilité des phases où le patin est bloqué ; 2. Irréversibilité des phases de glissement.

**Réversibilité des phases où le patin est bloqué.** Le patin est bloqué quand  $|\sigma| < \sigma_c$ . Dans ce cas la relation force-déplacement s’écrit  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$  avec  $\varepsilon^p$  constant. En terme des vitesses on a donc  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$  quel que soit le signe de  $\dot{\varepsilon}$ . La réponse est bien réversible. On peut parcourir le segment de droite traduisant la relation entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  dans les deux sens, cf Figure 5.4.

**Irréversibilité des phases de glissement du patin.** Le patin ne peut glisser que quand  $|\sigma| = \sigma_c$ . Envisageons le cas  $\sigma = +\sigma_c$ . Le patin glissera effectivement vers la droite si l’on augmente  $\varepsilon$ , donc en terme de vitesse si  $\dot{\varepsilon} > 0$ . Par contre si on inverse le sens du chargement et faisons  $\dot{\varepsilon} < 0$ , alors il

Il y a nécessairement décharge, le patin se bloque et on entre dans une phase du type précédent. Par conséquent la droite  $\sigma = +\sigma_c$  ne peut être parcourue que dans le sens des  $\varepsilon$  croissants. De même si on envisage le cas  $\sigma = -\sigma_c$ , le patin glissera effectivement vers la gauche si l'on diminue  $\varepsilon$  *i.e.* si  $\dot{\varepsilon} < 0$ . Par contre si on fait  $\dot{\varepsilon} > 0$ , alors le patin se bloque. Par conséquent la droite  $\sigma = -\sigma_c$  ne peut être parcourue que dans le sens des  $\varepsilon$  décroissants.

En résumé, le comportement de l'assemblage patin-ressort peut se résumer en les deux droites  $\sigma = \pm\sigma_c$  qui ne peuvent se parcourir que dans un sens et qui correspondent aux phases de glissement du patin et à la famille de segments de droite de pente  $E$  joignant ces deux droites qui correspondent aux phases réversibles où le patin est bloqué, cf Figure 5.4.

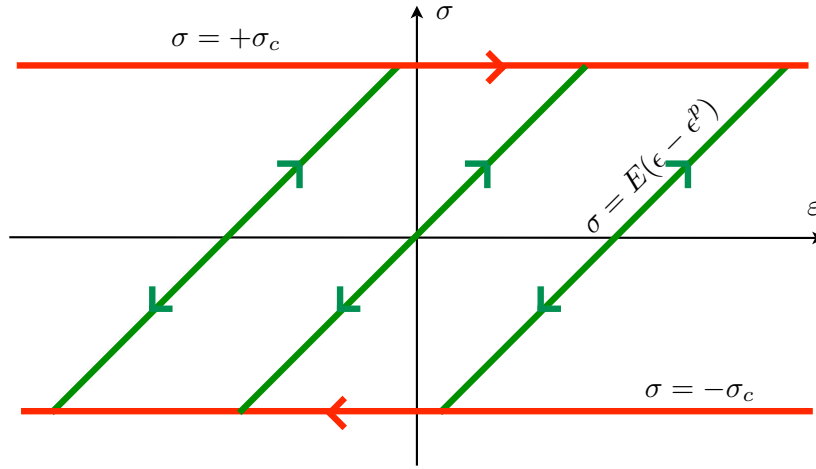


FIGURE 5.4 – Diagramme résumant le comportement de l'assemblage patin-ressort. En rouge : les phases irréversibles de glissement du patin ; en vert : les phases réversibles de blocage du patin.

**Bilan d'énergie.** Il est intéressant d'analyser ce comportement patin-ressort d'un point de vue énergétique. Faisons un bilan d'énergie : l'énergie fournie par l'agent extérieur qui déplace l'extrémité libre du ressort est égale au travail  $\mathcal{W}$  de la force dans le déplacement de cette extrémité. En notant  $t \mapsto \varepsilon(t)$  et  $t \mapsto \sigma(t)$  l'évolution du déplacement et de la force au cours du chemin de chargement entre  $t = 0$  et  $t = 1$ , on a

$$\mathcal{W} = \int_0^1 \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) dt.$$

Cette énergie est partiellement utilisée pour déformer le ressort alors que le reste est dissipé par frottement lors du glissement du patin. L'énergie élastique  $\mathcal{E}$  stockée dans le ressort lorsqu'il est soumis à une tension  $\sigma$  est égale à

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

En notant  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  les forces extérieures initiale et finale, le gain d'énergie élastique du ressort au cours du processus est donc

$$\Delta\mathcal{E} := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = \frac{\sigma_1^2}{2E} - \frac{\sigma_0^2}{2E}.$$

L'énergie dissipée  $\mathcal{D}$  est égale au travail de la force de frottement (qu'exerce le patin sur le sol) dans le déplacement du patin. Comme cette force est égale à  $\pm\sigma_c$  quand le patin glisse et que le signe est donné par le sens du glissement du patin, on a

$$\mathcal{D} = \int_0^1 \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p(t)| dt,$$

quantité qui est évidemment positive. Cette énergie dissipée, ou plus exactement la puissance dissipée  $\sigma \dot{\varepsilon}^p$ , servira de source de chaleur qui tendra à provoquer un échauffement du support (et du patin). Pour évaluer précisément ces évolutions de la température dans le système, il faudrait écrire l'équation de la chaleur, ce qui passe par des hypothèses supplémentaires sur le comportement de l'assemblage et de son environnement. Nous ne le ferons pas ici. Vérifions simplement que l'on a bien

$$\mathcal{W} = \Delta\mathcal{E} + \mathcal{D}. \quad (5.3)$$

Comme  $\varepsilon(t) = \sigma(t)/E + \varepsilon^p(t)$ , on a

$$\mathcal{W} = \int_0^1 \sigma(t) \left( \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \dot{\varepsilon}^p(t) \right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma(t)^2}{2E} \right) dt + \int_0^1 \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p(t)| dt = \Delta\mathcal{E} + \mathcal{D}$$

où on utilise le fait que  $\sigma \dot{\varepsilon}^p = \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p|$ , cf (5.2). Graphiquement ces énergies se voient dans le diagramme

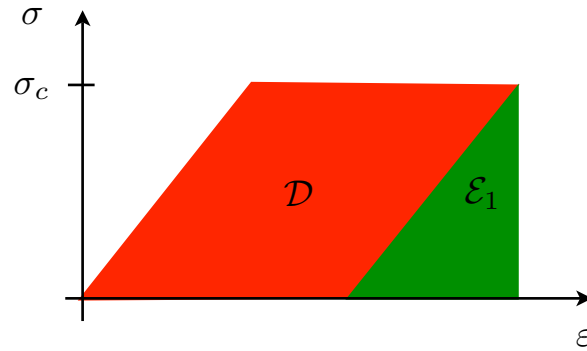


FIGURE 5.5 – Bilan d'énergie de l'assemblage patin-ressort à la fin de la montée en charge. En vert : l'énergie élastique stockée dans le ressort ; en rouge : l'énergie dissipée par frottement.

$(\varepsilon, \sigma)$ . Par exemple, lors d'un chargement monotone partant de l'état naturel ( $\varepsilon_0 = 0, \sigma_0 = 0$ ), le travail  $\mathcal{W}$  est l'aire sous la courbe force-déplacement ; l'énergie élastique  $\mathcal{E}_1$  à la fin du processus est l'aire du triangle ; l'énergie dissipée  $\mathcal{D}$  est l'aire du parallélogramme, cf Figure 5.5. On voit qu'après la phase de mise en tension du ressort tout le supplément d'énergie apportée par l'agent extérieur est dissipée par frottement.

**Exercice 5.2.** On fait subir à l'extrémité libre du ressort d'un assemblage patin-ressort un cycle de déplacement, i.e. un chargement tel que les positions initiale et finale de l'extrémité libre coïncident :  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$ . Montrer qu'il faut nécessairement fournir de l'énergie, i.e.  $\mathcal{W} \geq 0$ . Comparer cette énergie à l'énergie dissipée. Quand a-t-on  $\mathcal{W} = \mathcal{D}$  ?

### 5.1.2 Le modèle ressort–patin–ressort

Compliquons l'assemblage en y incorporant un deuxième ressort dont une extrémité est fixée à un support et l'autre est fixée au patin qui reste attaché au premier ressort, cf Figure 5.6. Le nouveau ressort a une raideur  $H$ . On suppose que dans la configuration de référence, les deux ressorts sont dans leur état naturel et on note toujours  $\varepsilon^p$  et  $\varepsilon$  les déplacements du patin et de l'extrémité libre du premier ressort. Si l'on note  $\sigma$  la force exercée sur l'extrémité libre du premier ressort et  $X$  la tension

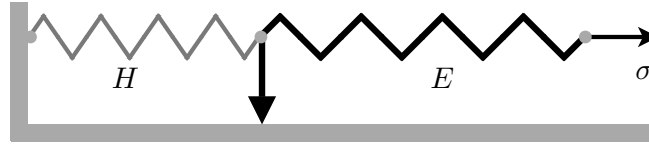


FIGURE 5.6 – L'assemblage ressort–patin–ressort.

du deuxième ressort, on a

$$X = H\varepsilon^p, \quad \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p). \quad (5.4)$$

La force  $\tau$  qu'exerce le patin sur le support est maintenant donnée par

$$\tau = \sigma - X = E\varepsilon - (E + H)\varepsilon^p \quad (5.5)$$

et la loi de glissement du patin devient

$$|\sigma - X| \leq \sigma_c, \quad \varepsilon^p \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \sigma - X = +\sigma_c \\ = 0 & \text{si } |\sigma - X| < \sigma_c \\ \leq 0 & \text{si } \sigma - X = -\sigma_c \end{cases} \quad (5.6)$$

Suivons la même démarche que dans le cas du patin–ressort et étudions la réponse de ce nouveau assemblage lorsqu'on contrôle la position  $\varepsilon$  de l'extrémité libre du ressort.

**Chargement monotone.** L'assemblage partant de son état naturel, lorsqu'on augmente progressivement  $\varepsilon$  depuis 0, on distingue toujours deux phases, cf Figure 5.7 :

1. *Phase de mise en tension du ressort.* C'est la même que dans le cas du patin–ressort : tant que  $\varepsilon < \sigma_c/E$ , le patin reste bloqué et donc le deuxième ressort n'est pas activé, le premier ressort se tend (pour le démontrer rigoureusement, on raisonne encore par continuité en remarquant que  $\tau = \sigma - X$  part de 0 et restera donc au début plus petit que  $\sigma_c$  en valeur absolue).
2. *Phase de glissement vers la droite.* Quand  $\varepsilon = \sigma_c/E$ , on a par continuité  $\sigma = \tau = \sigma_c$ ,  $X = 0$  et  $\varepsilon^p = 0$ . Le seuil de glissement vers la droite est donc atteint. Montrons que  $\tau$  reste bloquée à  $\sigma_c$  quand  $\varepsilon$  dépasse  $\sigma_c/E$ .

C'est une simple adaptation du raisonnement fait pour le patin–ressort. On raisonne par contradiction. Supposons que  $\tau < \sigma_c$  à un instant  $\varepsilon_1 \geq \sigma_c/E$ , le déplacement du patin valant  $\varepsilon^p$ . Par continuité ce sera encore vrai dans un intervalle  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ . Prenons  $\varepsilon_0$  le plus petit possible. Comme  $\tau = \sigma_c$  quand  $\varepsilon = \sigma_c/E$ , on a nécessairement  $\tau = \sigma_c$  quand  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Dans l'intervalle  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ ,  $\varepsilon^p$  n'évolue pas puisque le seuil de glissement n'est pas atteint. On devrait donc avoir  $\sigma_c = E\varepsilon_0 - (E + H)\varepsilon^p$  et d'autre part  $\sigma_c > E\varepsilon_1 - (E + H)\varepsilon^p$ , ce qui est impossible. Donc  $\tau = \sigma_c$  pour tout  $\varepsilon \geq \sigma_c/E$ .



En reportant dans (5.4), on obtient

$$\varepsilon^p = \frac{E}{E+H}\varepsilon - \frac{\sigma_c}{E+H}$$

et donc le patin glisse vers la droite en tendant le deuxième ressort. La force  $\sigma$  est donnée par

$$\sigma = \frac{EH}{E+H}\varepsilon + \frac{E}{E+H}\sigma_c,$$

elle est également croissante ce qui montre que le premier ressort se tend également. On reconnaît dans la pente  $\frac{EH}{E+H}$  la raideur équivalente de deux ressorts en série (qui est la moyenne harmonique des deux ressorts en série et est donc plus petite que la raideur de chacun des deux ressorts). On voit que le deuxième ressort a pour effet de rendre de plus en plus difficile de déplacer le patin. Ce phénomène est appelé *écrouissage* ou *durcissement*.

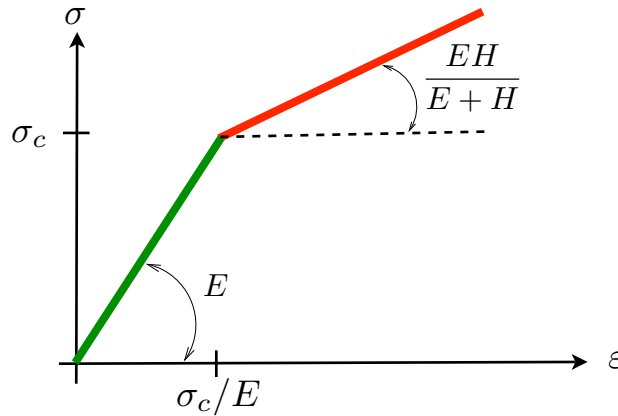


FIGURE 5.7 – Réponse de l’assemblage ressort-patin-ressort sous chargement monotone. En vert : phase de mise en tension du premier ressort ; en rouge : phase de glissement du patin.

**Décharge.** Envisageons une diminution de  $\varepsilon$  à partir de  $\varepsilon_*$ , le déplacement du patin valant alors  $\varepsilon_*^p = \frac{E}{E+H}\varepsilon_* - \frac{\sigma_c}{E+H}$  et la force  $\sigma_* = \frac{EH}{E+H}\varepsilon_* + \frac{E}{E+H}\sigma_c$ . On peut toujours distinguer deux phases, cf Figure 5.8 :

1. *Phase de blocage du patin.* En raisonnant toujours par contradiction et par continuité, on montre qu’au début de la décharge le patin se bloque,  $\varepsilon^p$  restant à la valeur  $\varepsilon_*^p$ . Durant cette phase on a donc  $\varepsilon^p = \varepsilon_*^p$  et  $\tau = E(\varepsilon - \varepsilon_*) + \sigma_c$ . Donc  $\tau$  diminue progressivement depuis la valeur critique  $\sigma_c$ . Il s’annule quand  $\varepsilon = \varepsilon_* - \sigma_c/E$  puis devient négatif. Cette phase prend fin quand  $\tau = -\sigma_c$  et donc quand  $\varepsilon = \varepsilon_* - 2\sigma_c/E$ , valeur identique à celle de l’assemblage patin-ressort. À ce moment-là la force vaut  $\sigma_* - 2\sigma_c$ . Elle sera donc négative si  $\sigma_* < 2\sigma_c$ , ce qui veut dire que le glissement du patin sera activé vers la gauche alors que le premier ressort est encore en tension.
2. *Phase de glissement vers la gauche.* Quand  $\varepsilon$  devient inférieur à  $\varepsilon_* - 2\sigma_c/E$  et continue à décroître,  $\tau$  reste bloqué à  $-\sigma_c$ . Le patin glisse vers la gauche et modifie la tension du deuxième

ressort. On a donc

$$\varepsilon^p = \frac{E}{E+H}\varepsilon + \frac{\sigma_c}{E+H}, \quad \sigma = \frac{EH}{E+H}\varepsilon - \frac{E}{E+H}\sigma_c$$

durant cette phase, la raideur apparente étant celle des deux ressorts en série.

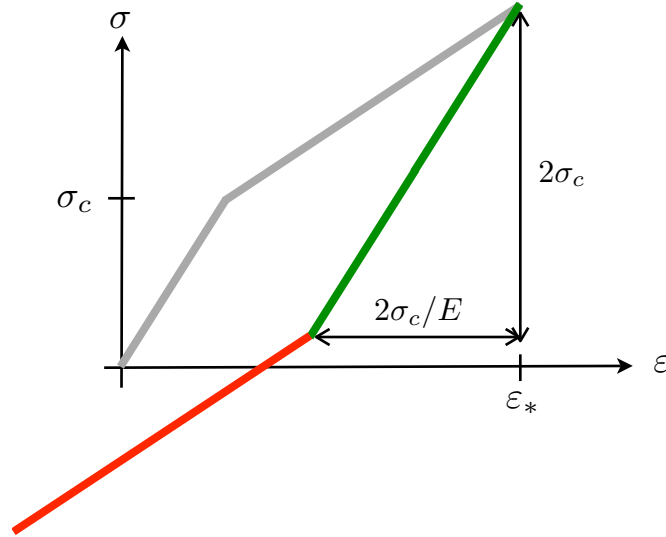


FIGURE 5.8 – Réponse de l’assemblage ressort-patin-ressort lors de la décharge. En vert : phase de blocage du patin ; en rouge : phase de glissement du patin vers la gauche.

On peut généraliser ces résultats à n’importe quel chemin de chargement et dégager comme pour l’assemblage patin-ressort deux types de phases : 1. Les phases réversibles où le patin est bloqué ; 2. Les phases irréversibles de glissement, cf Figure 5.9.

**Phases réversibles où le patin est bloqué.** Le patin est bloqué quand  $|\tau| < \sigma_c$ . Dans ce cas la relation force-déplacement s’écrit  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$  avec  $\varepsilon^p$  constant. Cela correspond à un segment de droite de pente  $E$  dans le plan  $(\varepsilon, \sigma)$ , segment que l’on peut parcourir dans les deux sens (réversibilité) et dont les extrémités se trouvent sur les deux droites correspondant au glissement du patin, cf Figure 5.9.

**Phases irréversibles de glissement du patin.** Le patin ne peut glisser que quand  $|\tau| = \sigma_c$ . Dans le cas  $\tau = +\sigma_c$ , le patin glissera effectivement vers la droite si l’on augmente  $\varepsilon$  mais se bloquera dans le cas contraire (irréversibilité). Lorsque le patin glisse, le point  $(\varepsilon, \sigma)$  décrit la droite  $\sigma = \frac{EH}{E+H}\varepsilon + \frac{E}{E+H}\sigma_c$  dans le sens des  $\varepsilon$  croissants. De même dans le cas  $\sigma = -\sigma_c$ , le patin glissera effectivement vers la gauche si l’on diminue  $\varepsilon$  et se bloquera sinon. Lorsque le patin glisse, le point  $(\varepsilon, \sigma)$  décrit la droite  $\sigma = \frac{EH}{E+H}\varepsilon - \frac{E}{E+H}\sigma_c$  dans le sens des  $\varepsilon$  décroissants.

**Bilan d’énergie.** Faisons le bilan d’énergie pour l’assemblage ressort-patin-ressort lors d’un chemin de chargement entre  $t = 0$  et  $t = 1$  où le déplacement de l’extrémité libre du premier ressort et la force

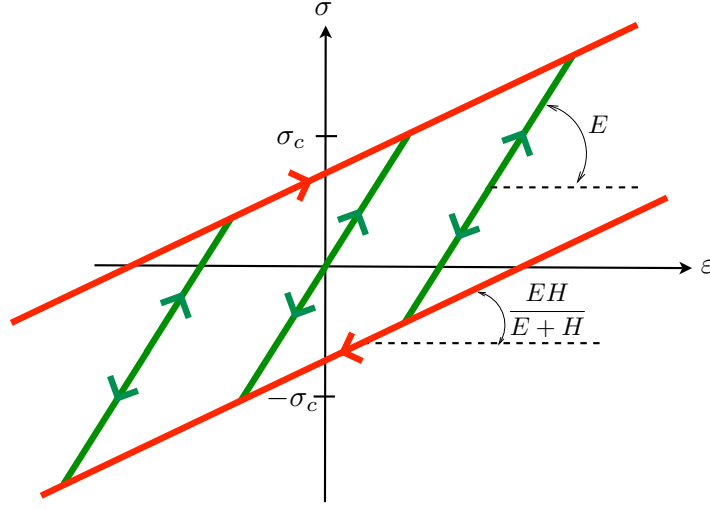


FIGURE 5.9 – Diagramme résumant le comportement de l’assemblage ressort-patin-ressort. En rouge : les phases irréversibles de glissement du patin ; en vert : les phases réversibles de blocage du patin.

suivent l’évolution  $t \mapsto \varepsilon(t)$  et  $t \mapsto \sigma(t)$ . L’énergie fournie par l’agent extérieur qui déplace l’extrémité libre du ressort est donnée par

$$\mathcal{W} = \int_0^1 \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) dt.$$

Cette énergie est partiellement utilisée pour déformer les deux ressorts alors que le reste est dissipé par frottement lors du glissement du patin. L’énergie élastique  $\mathcal{E}$  stockée dans les deux ressorts lorsque le premier est soumis à une tension  $\sigma$  et que le déplacement du patin est  $\varepsilon^p$  est donnée par

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{1}{2} H \varepsilon^{p2}.$$

En notant  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  les forces extérieures initiale et finale,  $\varepsilon_0^p$  et  $\varepsilon_1^p$  les déplacements initial et final du patin, le gain d’énergie élastique des ressorts au cours du processus est donc

$$\Delta \mathcal{E} := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = \frac{\sigma_1^2}{2E} + \frac{1}{2} H \varepsilon_1^{p2} - \frac{\sigma_0^2}{2E} - \frac{1}{2} H \varepsilon_0^{p2}.$$

L’énergie dissipée  $\mathcal{D}$  est égale au travail de la force de frottement (qu’exerce le patin sur le sol) dans le déplacement du patin et vaut donc

$$\mathcal{D} = \int_0^1 \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p(t)| dt.$$

Vérifions que  $\mathcal{W} = \Delta \mathcal{E} + \mathcal{D}$ .

Comme  $\varepsilon(t) = \sigma(t)/E + \varepsilon^p(t)$  et que  $\tau(t) = \sigma(t) - H\varepsilon^p(t)$ , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \int_0^1 \sigma(t) \left( \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \dot{\varepsilon}^p(t) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left( \sigma(t) \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + H\varepsilon^p(t) \dot{\varepsilon}^p(t) + \tau(t) \dot{\varepsilon}^p(t) \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma(t)^2}{2E} + \frac{1}{2} H\varepsilon^p(t)^2 \right) dt + \int_0^1 \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p(t)| dt \\
&= \Delta\mathcal{E} + \mathcal{D}
\end{aligned}$$

où on utilisé le fait que  $\tau \dot{\varepsilon}^p = \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p|$ , cf (5.6).

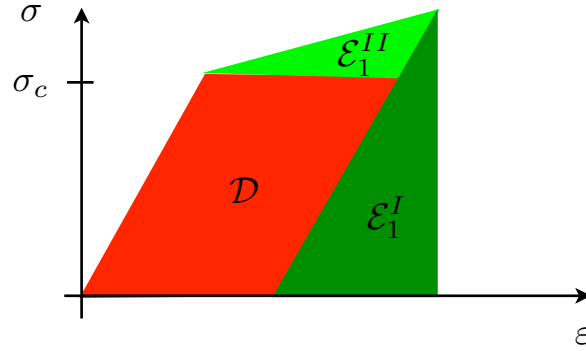


FIGURE 5.10 – Bilan d'énergie de l'assemblage patin-ressort à la fin de la montée en charge. En vert foncé : l'énergie élastique stockée dans le premier ressort ; en vert clair : l'énergie élastique stockée dans le deuxième ressort ; en rouge : l'énergie dissipée par frottement.

Graphiquement ces énergies se voient dans le diagramme  $(\varepsilon, \sigma)$ . Par exemple, lors d'un chargement monotone partant de l'état naturel  $(\varepsilon_0 = 0, \sigma_0 = 0)$ , le travail  $\mathcal{W}$  est l'aire sous la courbe force-déplacement ; l'énergie élastique  $\mathcal{E}_1$  à la fin du processus est la somme des aires des 2 triangles (le vert foncé correspondant au premier ressort, le vert clair au deuxième) ; l'énergie dissipée  $\mathcal{D}$  est l'aire du parallélogramme, cf Figure 5.10.

**Exercice 5.3.** Reprendre l'Exercice 5.2 et montrer qu'il faut fournir de l'énergie pour faire faire un cycle à l'extrémité libre du premier ressort.

## 5.2 Les concepts généraux du comportement élasto-plastique

Il s'agit dans cette section de dégager les concepts généraux entrant dans la modélisation du comportement élasto-plastique des matériaux. Le point de vue que nous adopterons est celui de l'ingénieur, autrement dit, on envisage de modéliser les phénomènes à l'échelle *macroscopique* en ne faisant référence à l'échelle *microscopique* que pour interpréter ou “justifier” certaines hypothèses. L'objectif est de construire “à moindre frais” un modèle susceptible d'être utilisé en *Calcul des Structures* pour concevoir et dimensionner celles-ci.

Le cadre adopté tout au long de cette modélisation sera, sauf mention expresse du contraire, le suivant :

- Le milieu continu est tridimensionnel (dans des situations parfois bidimensionnelles de déformations planes, contraintes planes ou déformations anti-planes) ;
- Les transformations sont infinitésimales et on adopte l'hypothèse des petites perturbations ;
- Les chargements et les réponses sont suffisamment lents pour que l'on puisse négliger tous les effets d'inertie et se placer en *quasi-statique* ;
- Tous les effets visqueux sont négligés, le comportement est dit *indépendant des vitesses* ;
- Tous les effets thermiques et de façon générale tout couplage avec d'autres phénomènes physiques sont ignorés.

Ce dernier point mérite une attention particulière, car comme la plasticité est un phénomène dissipatif, cette dissipation est une source de chaleur qui tend à augmenter la température du milieu. Toutefois, les processus peuvent se faire à température constante pourvu que l'on soit capable de compenser à chaque instant cette source de chaleur par une source de refroidissement équivalente, ce qui est le principe du thermostat. Autrement dit, on supposera tout au long de ce cours que le milieu est plongé dans un thermostat "parfait" qui assure que toutes les évolutions sont isothermes. Ceci n'est évidemment qu'imparfaitement satisfait en pratique mais cette hypothèse qui simplifie grandement l'analyse s'avère tout à fait raisonnable dans de nombreuses applications.

### 5.2.1 Les déformations plastiques et la relation contrainte-déformation

Comme on l'a indiqué au Chapitre 1, le mécanisme élémentaire de déformation résiduelle des métaux est le défaut d'empilement cristallin que l'on appelle dislocation. Il est visible individuellement à l'échelle du réseau cristallin, mais sa manifestation macroscopique qu'est la déformation résiduelle met en jeu un très grand nombre de tels défauts. Le point de vue de l'ingénieur exige de renoncer à les traiter de façon individuelle et de se contenter d'en rendre compte collectivement. À l'échelle macroscopique, cette collection de défauts cristallins est représentée au niveau de l'élément de volume par un tenseur dit *tenseur de déformation plastique*. Comme son homologue le "vrai" tenseur de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , il est par définition *symétrique* et noté  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ . Il peut être considéré comme une *variable d'état* de l'élément de volume au même titre que  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Cette variable d'état sert à mémoriser une partie de l'histoire de l'élément de volume. En se référant à l'assemblage patin-ressort, elle va jouer le même rôle que le déplacement  $\varepsilon^p$  du patin. De façon plus précise, on suppose qu'à déformation plastique fixée le comportement de l'élément de volume est linéairement élastique et caractérisé par le tenseur de rigidité  $\underline{\underline{C}}$  ou son inverse le tenseur de souplesse  $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ . En interprétant  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  comme la déformation résiduelle qu'aurait l'élément de volume si on ramenait les contraintes à 0<sup>2</sup>, la relation contrainte-déformation s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p). \quad (5.7)$$

Une autre façon d'écrire cette relation consiste à décomposer au préalable la *déformation totale*  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  en *déformation élastique*  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  et *déformation plastique*, ce qui consiste simplement à écrire

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad (5.8)$$

---

2. Il n'est pas toujours possible d'annuler réellement les contraintes sans modifier les déformations plastiques à cause de l'écrouissage (cf l'exemple de l'assemblage ressort-patin-ressort), ce qui veut dire que cette interprétation de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  comme déformation résiduelle est avant tout abstraite.

la relation (5.7) devenant alors

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e.$$

**ATTENTION** : En général, seule la déformation totale  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est compatible, *i.e.* est la partie symétrique du gradient d'un déplacement, les déformations élastiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  et plastiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  ne le sont pas.

### 5.2.2 Le domaine d'élasticité et le seuil de plasticité

Il reste à définir la loi d'évolution de la déformation plastique. Dans le cas de l'assemblage patin-ressort cela consistait en la loi de glissement du patin. Elle se formulait en terme d'une force de frottement critique. Les essais uniaxiaux suggèrent que les déformations plastiques n'évoluent pas tant que la contrainte reste dans un certain intervalle (qui peut évoluer). Ceci se généralise en postulant qu'il existe à chaque instant dans l'espace des contraintes, *i.e.* dans l'espace  $\mathbb{M}_s^3$  des tenseurs d'ordre 2 symétriques, un domaine  $\mathbb{S}$  dit *domaine de réversibilité* ou *domaine d'élasticité* tel que la déformation plastique n'évolue pas tant que les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  restent à l'intérieur. Le bord  $\partial\mathbb{S}$  de ce domaine est appelé *surface seuil de plasticité*<sup>3</sup>. En pratique, il est commode de représenter ce domaine de réversibilité à l'aide d'une fonction  $f : \mathbb{M}_s^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dite *fonction seuil* ou *critère de plasticité*. Dans ce cas,  $\mathbb{S}$  et  $\partial\mathbb{S}$  sont définis par

$$\mathbb{S} = \{\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{M}_s^3 : f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0\}, \quad \partial\mathbb{S} = \{\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{M}_s^3 : f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0\}.$$

Ce domaine d'élasticité doit être identifié expérimentalement, nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

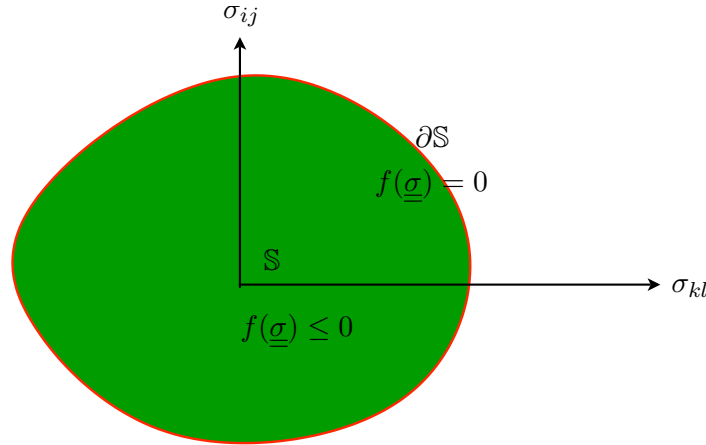


FIGURE 5.11 – Le domaine d'élasticité (en vert) et la surface seuil de plasticité (en rouge) dans l'espace des contraintes.

De plus, il est susceptible d'évoluer au fur et à mesure que l'on plastifie le matériau. C'est la notion d'écrouissage sur laquelle nous reviendrons à la fin de cette section.

3. D'un point de vue technique, on a besoin dans certaines démonstrations de préciser les propriétés topologiques de  $\mathbb{S}$ . Nous avons au minimum besoin que  $\mathbb{S}$  soit un ensemble *connexe fermé d'intérieur non vide*.

Ce domaine de réversibilité est défini dans l'espace des contraintes, mais il est utile d'introduire son image dans l'espace des déformations,

$$\mathbb{E} = \{\underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{M}_s^3 : \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \in \mathbb{S}\},$$

c'est un ensemble connexe fermé d'intérieur non vide dans  $\mathbb{M}_s^3$ , tout comme  $\mathbb{S}$ . L'intérieur de  $\mathbb{E}$  correspond à l'intérieur de  $\mathbb{S}$  et le bord  $\partial\mathbb{E}$  correspond au bord  $\partial\mathbb{S}$ .

### 5.2.3 La loi d'écoulement plastique

Il s'agit de préciser maintenant la loi d'évolution de la déformation plastique. Le domaine de réversibilité a été introduit pour traduire le fait que la déformation plastique n'évolue pas tant que les contraintes restent à l'intérieur du domaine, de la même façon que le patin n'évolue pas tant que la force de frottement  $\tau$  n'atteint pas la valeur critique  $\sigma_c$ . On va le traduire par la condition

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{0}} \quad \text{si} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0.$$

Lorsque le tenseur des contraintes est sur la surface seuil de plasticité, la déformation plastique peut évoluer. Dans le cas du patin, on précisait alors la direction possible de glissement. On va faire la même chose ici, mais compte tenu du caractère tensoriel de la déformation plastique cela consiste à se donner la direction du tenseur  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  en laissant sa norme indéterminée. On écrit donc

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\eta} \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad \text{si} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0,$$

où  $\dot{\eta}$  est un scalaire arbitraire et  $\underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\sigma}})$  est la direction donnée<sup>4</sup> de la vitesse de déformation plastique (qui dépend de l'état de contrainte).

### 5.2.4 L'écrouissage

Le domaine de réversibilité peut varier au cours du temps ou plus exactement au fur et à mesure que la déformation plastique évolue. Lorsque le domaine est fixe, on parle de *plasticité parfaite*, alors que quand il varie, on parle de *plasticité avec écrouissage*. Ce phénomène d'écrouissage a été constaté dans le modèle rhéologique ressort-patin-ressort alors qu'il était absent dans le modèle patin-ressort. Il était dû au deuxième ressort qui retenait le patin et exigeait d'exercer une force de plus en plus grande pour déplacer le patin. Dans les matériaux cet écrouissage est dû de façon un peu similaire à la difficulté qu'ont les dislocations de se développer du fait de la présence d'amas de dislocations précédemment créées<sup>5</sup>. La conséquence est que dans un essai de traction uniaxiale il faut imposer une contrainte de plus en plus forte pour plastifier le matériau. Mais en contrepartie, pour certains

4. Dans le cas où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est un point "singulier" de la surface seuil où la normale n'est pas définie, comme c'est le cas par exemple pour le critère de Tresca qui présente des "coins", on peut être amené à écrire  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  comme une combinaison linéaire de directions données, *i.e.*  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \sum_{i=1}^N \dot{\eta}_i \underline{\underline{g}}_i(\underline{\underline{\sigma}})$ .

5. Dans les polycristaux, l'écrouissage peut être aussi intergranulaire. Le polycristal peut être vu comme une structure dont les éléments (les grains) plastifient pour un niveau de sollicitation différent (du fait de leur désorientation relative). On retrouve ici les notions d'écrouissage structurel qui seront développées dans le chapitre 3 mais appliquées à un autre type de structure (l'agrégat de cristaux désorientés).

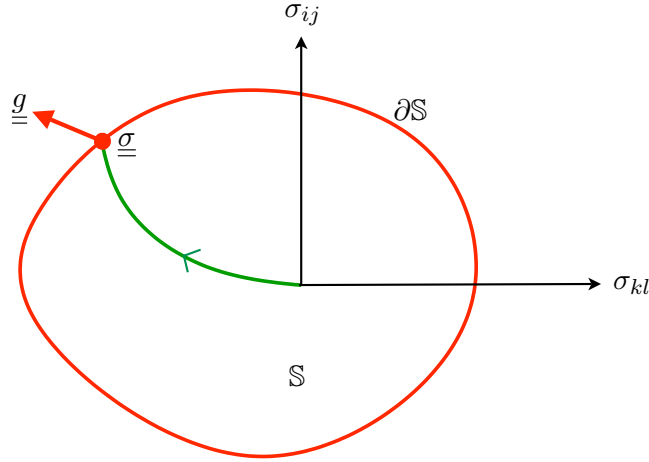


FIGURE 5.12 – Loi d'évolution de la déformation plastique : pas d'évolution de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  tant que  $\underline{\underline{\sigma}}$  reste à l'intérieur du domaine de réversibilité actuel et évolution possible de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  dans une direction donnée lorsque  $\underline{\underline{\sigma}}$  atteint le seuil de plasticité.

matériaux, il peut s'avérer plus facile ensuite de plastifier le matériau en compression, comme c'était le cas dans le modèle ressort-patin-ressort. Ce phénomène est appelé *effet Bauschinger*.

Au niveau de la modélisation, il s'agit donc de rendre compte des évolutions du domaine de réversibilité lui-même. Il n'est pas question ici d'essayer d'être exhaustif, aussi se contentera-t-on de dégager quelques exemples d'écrouissage.

### Ecrouissage cinématique

Le domaine de réversibilité se translate dans l'espace des contraintes sans se déformer. On peut alors écrire de façon générale :

$$\mathbb{S} = \underline{\underline{X}} + \mathbb{S}_0$$

où  $\underline{\underline{X}} \in \mathbb{M}_s^3$  est un tenseur représentant la translation du domaine initial  $\mathbb{S}_0$ . En terme de la fonction seuil cela s'écrit donc

$$\mathbb{S} = \{\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{M}_s^3 : f(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) \leq 0\}.$$

Cette translation dépend du temps et il reste donc à préciser son évolution. Un cas particulièrement simple est celui dit d'*écrouissage cinématique linéaire* où  $\underline{\underline{X}}$  est proportionnel à la déformation plastique, *i.e.*

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^p,$$

le tenseur d'ordre 4 s'appelant le *tenseur d'écrouissage*. Ceci généralise le modèle ressort-patin-ressort.

### Ecrouissage isotrope

Le domaine de réversibilité se dilate uniformément dans toutes les directions sans se déplacer. On peut écrire de façon générale

$$\mathbb{S} = R \mathbb{S}_0$$



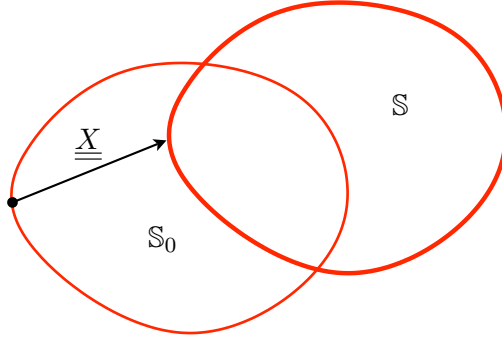


FIGURE 5.13 – Ecroûissage cinématique : translation du domaine de réversibilité.

où  $R > 1$  est un réel représentant la dilatation du domaine initial  $\mathbb{S}_0$ . En terme de la fonction seuil cela donne

$$\mathbb{S} = \{\underline{\sigma} \in \mathbb{M}_s^3 : f(\underline{\sigma}/R) \leq 0\}.$$

La dilatation dépend du temps et il reste à préciser son évolution. Cela peut se faire via l'introduction

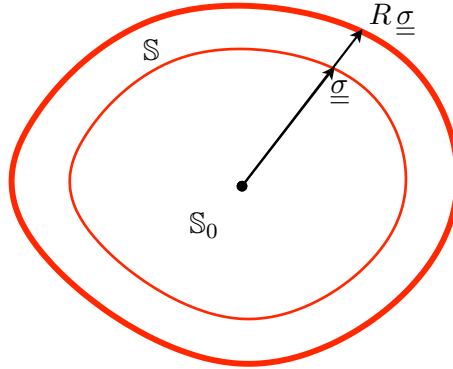


FIGURE 5.14 – Ecroûissage isotrope : dilatation du domaine de réversibilité.

de variables d'état supplémentaires. Par exemple, on peut supposer que le coefficient de dilatation  $R$  dépend de la *déformation plastique cumulée*  $p$  définie par

$$p(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\underline{\epsilon}}^p(s)\| ds \quad (5.9)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne, *i.e.*  $\|\underline{\epsilon}\|^2 = \sum_{i,j} e_{ij}e_{ij}$ , le coefficient  $\sqrt{2/3}$  étant introduit pour que  $p$  ait une interprétation simple dans des essais uniaxiaux. On a alors

$$\mathbb{S} = R(p)\mathbb{S}_0$$

et la fonction  $p \mapsto R(p)$  est à identifier expérimentalement tout comme  $\mathbb{S}_0$ .

## Autres types d'écrouissage

On peut évidemment envisager des lois d'écrouissage plus complexes, ne serait-ce qu'en combinant les écrouissages cinématique et isotrope. Les résultats expérimentaux présentés à la fin du chapitre montrent d'ailleurs que la modélisation de l'écrouissage réel des matériaux est un des problèmes les plus ardues et les moins achevés de la théorie de l'élasto-plasticité.

## 5.3 Les spécificités des lois “standards” de plasticité parfaite

Les considérations générales précédentes laissent une grande latitude quant aux lois d'évolution possibles. En particulier, si l'on peut toujours considérer que l'identification expérimentale du domaine de réversibilité est relativement aisée (même si cela demande d'être capable de faire des essais tri-axiaux quelconques), l'identification de la loi d'écoulement et tout particulièrement de la fonction  $\underline{\sigma} \mapsto \underline{g}(\underline{\sigma})$  est beaucoup plus délicate. Il est donc souhaitable de dégager des principes physiques de portée générale susceptibles de réduire cette part d'arbitraire. Parmi ces principes généraux, on est tenté d'en dégager deux du fait de leur caractère universel : (i) le Principe d'Objectivité ou d'Indifférence Matérielle ; (ii) le Deuxième Principe de la Thermodynamique. Le premier requiert que les relations de comportement soient invariantes par changement de référentiel, le deuxième exige via l'inégalité de Clausius-Duhem que la production interne d'entropie soit non négative dans toute évolution. La formalisation de ces deux principes passe par l'introduction d'un certain nombre d'hypothèses préalables. On peut ensuite les appliquer et s'en servir pour exclure toute loi de comportement qui pourrait les violer dans certaines circonstances. Autrement dit, on les utilise comme critère de sélection des “bonnes lois de comportement”.

Dans le cas de l'élasto-plasticité, il s'avère que ces deux principes ont un pouvoir de sélection relativement faible, laissant presque entière la question du choix de la loi d'évolution. On se propose d'en introduire un troisième qui ne peut pas prétendre à la même universalité, mais qui se révèle suffisamment sélectif pour que les lois de comportement sur lesquelles on débouche aient les “bonnes propriétés”. Ce principe qui ne porte aujourd'hui que le nom de postulat du fait de son caractère “non reconnu” a été proposé sous une forme un peu différente et, semble-t-il, de façon indépendante par Drucker d'une part et Ilyushin d'autre part. Ce principe appliqué à l'élasto-plasticité permet d'obtenir une inégalité qui est à la base d'un certain nombre de propriétés fondamentales. Notons cependant que cette inégalité, elle-même appelée *Principe du Travail Plastique Maximal*, ne vaut que dans le cadre restreint de l'élasto-plasticité (parfaite) alors que le *Postulat de Drucker-Ilyushin* a une portée plus générale.

Dans toute cette section nous nous placerons dans le cadre de la plasticité parfaite, *i.e.* celui où le domaine de réversibilité est fixe dans l'espace des contraintes. Nous commençons par résumer les principales hypothèses faites dans la section précédente pour modéliser ce type de comportement avant d'aborder les *lois standards* *i.e.* celles qui s'appuient sur le principe du travail plastique maximal.

### 5.3.1 Le comportement élastique parfaitement plastique

Ce type de modèle repose sur les *relations de comportement* suivantes

- La relation contrainte-déformation :  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p)$
- L'admissibilité des contraintes :  $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}$  ou de façon équivalente  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$
- La loi d'écoulement plastique :  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = 0$  si  $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$  et  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\gamma} g(\underline{\underline{\sigma}})$  si  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ .

En pratique, l'utilisation de ce modèle consiste à calculer l'évolution de l'élément de volume lorsqu'on le soumet à un processus de chargement à partir d'un état initial donné. Le processus de chargement peut consister en la donnée du chemin de déformation  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  ou bien du chemin de contrainte  $t \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(t)$  ou bien d'un chemin mixte avec certaines composantes des déformations et les autres composantes des contraintes contrôlées. Remarquons cependant que comme les contraintes sont limitées puisqu'elles ne peuvent pas sortir du domaine de réversibilité qui est fixe, on ne peut pas imposer n'importe quel chemin de contrainte ou plus exactement le matériau ne peut pas supporter n'importe quel chemin de contrainte. Par contre, on peut procéder comme on l'a fait dans le cas du patin-ressort et envisager *a priori* n'importe quel chemin de déformation car les déformations ne sont pas limitées. Nous serons amenés tout au long de cette section à considérer des processus de chargement à déformation contrôlée ou mixtes.

**La question délicate de la régularité de l'évolution.** Considérons un processus de chargement à déformation contrôlée où  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  est le chemin de déformation imposé à l'élément de volume durant l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  et soit  $\underline{\underline{\varepsilon}}_0^p$  sa déformation plastique initiale (*i.e.* à l'instant  $t_0$ ). Il s'agit de déduire la réponse de cet élément de volume, *i.e.*  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$  et  $t \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(t)$ , à l'aide des relations de comportement. Comme on l'a vu dans le modèle du patin-ressort, il est essentiel de restreindre la recherche à des évolutions *continues* (sachant que, par définition d'un chemin, l'évolution des déformations est continue) ce qui revient à ne pas autoriser que les déformations plastiques ou les contraintes "sautent". C'est une hypothèse physique raisonnable. Toutefois, il n'est pas garanti mathématiquement que l'on puisse trouver une solution continue au problème d'évolution. Cela dépend à la fois du modèle et du chemin de déformation imposé. De plus, on a besoin dans la suite de cette section d'un peu plus de régularité que la simple continuité pour donner un sens "classique" à certaines quantités comme le travail de déformation ou l'énergie dissipée. Pour éviter toute difficulté d'ordre technique, nous n'envisagerons donc que des évolutions *régulières*, *i.e.* nous supposons que les déformations, les déformations plastiques et les contraintes sont des fonctions *continues et continûment différentiables par morceaux* du temps. Mais comme ceci est une hypothèse *a priori* et qu'on n'est pas assuré que tout chargement régulier engendre une évolution régulière, nous appellerons *chemins de déformation compatibles* avec la loi d'évolution ceux qui sont réguliers et qui engendrent des évolutions régulières. Encore faut-il qu'il y ait assez de tels chemins compatibles pour ne pas vider toute la substance de l'analyse qui suit. On peut le vérifier pour un modèle précis, cela reste du domaine de l'hypothèse dans le cas général. Hypothèse que nous adoptons implicitement.

### 5.3.2 Le postulat de Drucker-Ilyushin

Le postulat de Drucker-Ilyushin consiste à dire qu'il faut fournir de l'énergie au matériau pour lui faire faire un cycle en déformation. Sa formulation exacte nécessite de préciser ces différentes notions. Commençons par la notion de cycle.

**Définition d'un cycle en déformation.** On appelle cycle en déformation un chemin (donc une application continue)  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  de  $[t_0, t_1]$  dans  $\mathbb{M}_s^3$  tel que  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t_0) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t_1)$ .

Définissons ensuite la notion de travail de déformation.

**Définition du travail de déformation.** Si l'on fait subir à un élément de volume un chemin de déformation  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  compatible avec l'évolution durant l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  au cours duquel l'évolution des contraintes est  $t \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(t)$ , alors l'énergie que recevra cet élément de volume est égale au travail de déformation  $\mathcal{W}$ ,

$$\mathcal{W} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t) dt.$$

Cette énergie sera effectivement reçue par l'élément de volume si  $\mathcal{W} > 0$  et sera fournie si  $\mathcal{W} < 0$ .

Considérons un élément de volume d'un matériau élasto-plastique parfait dont l'évolution est régie par une loi définie dans la section précédente. Soumettons l'élément de volume à un cycle en déformation compatible avec la loi d'évolution. Le postulat se formule alors ainsi

**Postulat de Drucker-Ilyushin :** Le travail de déformation doit être non négatif dans tout cycle en déformation compatible avec la loi d'évolution.

On peut vérifier que cette propriété de positivité du travail de déformation dans tout cycle en déformation est satisfaite par le modèle patin-ressort, cf Exercice 5.2.

### 5.3.3 Le principe du travail plastique maximal de Hill.

Envisageons un chemin de déformation de l'élément de volume  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  durant lequel l'évolution de la déformation plastique  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$  est régulière. Faisons un bilan d'énergie. À l'instant  $t$ , les contraintes étant  $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ , la déformation élastique vaut  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}(t)$  et l'énergie élastique (volumique) vaut donc

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}(t).$$

La variation d'énergie élastique durant le processus est donnée par

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_1 : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}_1 - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}_0,$$

$\underline{\underline{\sigma}}_0$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_1$  désignant les contraintes initiales et finales. Par analogie avec le modèle rhéologique patin-ressort, supposons que le travail de déformation est la somme de la variation d'énergie élastique et de l'énergie dissipée<sup>6</sup> :

$$\mathcal{W} = \Delta \mathcal{E} + \mathcal{D}.$$

Comme  $\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\sigma}} : (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p$ , on a

$$\dot{\mathcal{D}} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p,$$

i.e. la puissance dissipée est égale à la puissance des contraintes dans la vitesse de déformation plastique, en accord avec ce que l'on avait pour le patin-ressort. Pour ce dernier, on avait en plus  $\sigma(t)\dot{\varepsilon}^p(t) = \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p(t)|$  à chaque instant et donc aussi

$$(\sigma(t) - \sigma^*)\dot{\varepsilon}^p(t) \geq 0, \quad \forall \sigma^* \text{ tel que } |\sigma^*| \leq \sigma_c.$$

---

6. Ceci ne peut qu'être une hypothèse tant que l'on ne s'intéresse qu'aux grandeurs mécaniques. La seule façon de le vérifier expérimentalement est de faire des mesures de température ou d'échange de chaleur.

Cette inégalité peut être considérée comme un principe de dissipation maximale. En effet,  $\sigma \dot{\varepsilon}^p$  représente la puissance réellement dissipée alors que  $\sigma^* \dot{\varepsilon}^p$  représente la puissance qui serait dissipée à un autre niveau de force admissible pour la même vitesse de glissement (c'est un max en  $\sigma^*$  pour  $\dot{\varepsilon}^p$  donné). Le principe du travail maximal de Hill consiste à étendre cette inégalité aux matériaux élasto-plastiques parfaits ou plus exactement à ne retenir que ceux qui la satisfont.

**Principe du Travail Plastique Maximal :** *À chaque instant où la vitesse de déformation plastique est définie<sup>7</sup>, la puissance réellement dissipée est supérieure ou égale à la puissance qui serait dissipée par toute contrainte admissible avec la même vitesse de déformation plastique :*

$$(\underline{\sigma}(t) - \underline{\sigma}^*) : \underline{\dot{\varepsilon}}^p(t) \geq 0, \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}. \quad (5.10)$$

Nous verrons que ce principe a des conséquences très importantes d'un point de vue qualitatif. Il est en particulier très sélectif en termes de lois de comportement. Sa faiblesse réside dans son caractère formel et nous allons voir qu'il peut se justifier à partir du postulat de Drucker-Ilyushin. Mais au préalable comparons-le avec le *Deuxième Principe de la Thermodynamique*.

Dans le cadre isotherme où nous nous sommes placés, le deuxième principe de la thermodynamique exige simplement que la puissance dissipée soit non négative à chaque instant. Par conséquent, pour un matériau élastique parfaitement plastique, on doit avoir

$$\dot{\mathcal{D}}(t) = \underline{\sigma}(t) : \underline{\dot{\varepsilon}}^p(t) \geq 0, \quad \forall t. \quad (5.11)$$

Il est clair que cette inégalité dite *Inégalité de Clausius-Duhem* est beaucoup moins restrictive que celle exigée par le principe du travail plastique maximal. On peut même considérer que celui-ci contient le deuxième principe de la thermodynamique en vertu de la proposition suivante

**Comparaison entre les principes.** *Pourvu que le domaine de réversibilité contienne l'état sans contrainte, i.e. pourvu que  $\underline{0} \in \mathbb{S}$ , un matériau élastique parfaitement plastique qui satisfait le Principe du Travail Plastique Maximal satisfait aussi le Deuxième Principe de la Thermodynamique.*

PREUVE. Si  $\underline{0} \in \mathbb{S}$ , alors en prenant  $\underline{\sigma}^* = \underline{0}$ , on déduit de (5.10) que  $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \geq 0$  à chaque instant, autrement dit (5.11).  $\square$

Mais évidemment la réciproque n'est pas vraie. Il est facile de construire des lois de comportement en élasto-plasticité parfaite où le deuxième principe est toujours vérifié mais pas celui du travail plastique maximal. Voici un exercice pour s'en convaincre.

**Exercice 5.4.** *Considérer un matériau élastique parfaitement plastique dont le critère de plasticité s'écrit  $\|\underline{\sigma}\| \leq \sigma_c$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne et  $\sigma_c > 0$ . Montrer que si la loi d'écoulement plastique s'écrit  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\eta} \underline{s}$  avec  $\dot{\eta} \geq 0$  quand  $\|\underline{\sigma}\| = \sigma_c$ ,  $\underline{s}$  désignant le déviateur de  $\underline{\sigma}$ , alors l'inégalité de Clausius-Duhem est toujours satisfaite mais pas forcément l'inégalité de Hill. Que faut-il pour que l'inégalité de Hill soit toujours satisfaite ?*

---

7. Voir la note en bas de page 95 pour une extension de cette inégalité aux instants où  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$  est seulement dérivable à droite.

### 5.3.4 Lien entre le postulat et le principe.

Le lien entre le principe de Hill et le postulat de Drucker-Ilyushin n'apparaît pas immédiatement même si tous deux sont basés sur des considérations énergétiques. On a pourtant le remarquable résultat suivant qui montre l'équivalence entre le postulat et le principe pour un matériau élastique parfaitement plastique aux questions de régularité près.

**Equivalence du postulat et du principe.** *Le postulat de Drucker-Ilyushin est satisfait si et seulement si le principe du travail plastique maximal de Hill est satisfait à chaque instant de toute évolution régulière.*

PREUVE. Pour démontrer proprement ce résultat on a besoin d'un peu de régularité pour  $\mathbb{S}$  et sa frontière  $\partial\mathbb{S}$  (au minimum que l'intérieur de  $\mathbb{S}$  soit non vide et connexe).

Montrons d'abord le *seulement si*. Considérons un chemin de déformation  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  de l'élément de volume élastique parfaitement plastique tel que l'évolution soit régulière et plaçons-nous à un instant  $s$  où la vitesse de déformation plastique vaut  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(s)$ . Le cas où  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(s) = 0$  étant trivial, supposons que  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(s) \neq 0$ . Soient  $\underline{\underline{\varepsilon}}(s)$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(s)$  les états de déformation et de contrainte correspondants. On a nécessairement  $\underline{\underline{\sigma}}(s) \in \partial\mathbb{S}$ .

Choisissons une contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  arbitraire à l'intérieur de  $\mathbb{S}$  et imaginons une autre évolution de l'élément de volume où il aurait pour déformation plastique initiale  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(s)$  et serait soumis au cycle en déformation  $t \mapsto \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}(t)$  défini ci-dessous qui comporte 3 phases, cf Figure 5.15. On note  $\mathbb{E}$  l'image du domaine de réversibilité dans l'espace des déformations à l'instant initial de ce cycle

$$\mathbb{E} = \{ \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{M}_s^3 : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s)) \in \mathbb{S} \}.$$

1.  $t \in [t_0, s)$ . On part de  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}(t_0) = \underline{\underline{\varepsilon}}^* = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s)$  et on va jusqu'à  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}(s) = \underline{\underline{\varepsilon}}(s) = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}(s) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s)$  de façon à ce que la déformation plastique n'évolue pas (il suffit que les déformations  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}(t)$  soient toujours à l'intérieur de  $\mathbb{E}$  durant cette phase, ce qui passe par l'hypothèse de connexité) ;
2.  $t \in [s, s+h]$  avec  $h > 0$  assez petit. On suit le "vrai" chemin de chargement durant cet intervalle de temps, *i.e.*  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$ , ce qui provoque une (petite) évolution de la déformation plastique jusqu'à  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h)$ . Ceci a pour effet de modifier (un peu) le domaine de réversibilité dans l'espace des déformations qui devient  $\mathbb{E}_h$ ,

$$\mathbb{E}_h = \{ \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{M}_s^3 : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h)) \in \mathbb{S} \} = \mathbb{E} + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h) - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s),$$

qui se déduit donc de  $\mathbb{E}$  par la translation  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h) - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s)$  (écrouissage cinématique dans l'espace des déformations). Cette translation tend vers  $\underline{\underline{0}}$  quand  $h$  tend vers 0.

3.  $t \in (s+h, t_1]$ . On revient à l'état de déformation initial  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  en s'arrangeant pour que les déformations restent toujours à l'intérieur du domaine de réversibilité  $\mathbb{E}_h$  de façon à ce que les déformations plastiques n'évoluent pas. Ceci est toujours possible dans la mesure où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  est intérieur à  $\mathbb{E}$  (moyennant l'hypothèse de connexité). En effet, il suffit de prendre  $h$  suffisamment petit de façon à ce que le domaine de réversibilité bouge suffisamment peu pour que  $\underline{\underline{\varepsilon}}^* \in \mathbb{E}_h$ .

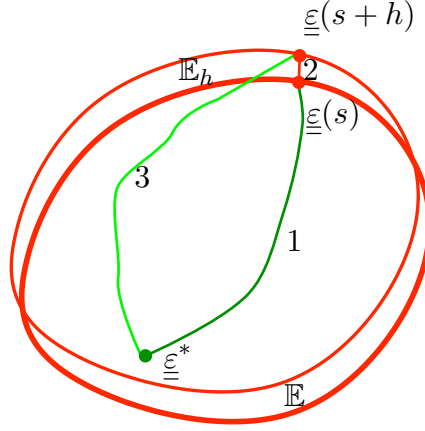


FIGURE 5.15 – Cycle en déformation utilisé dans le postulat de Drucker-Ilyushin.

Calculons le travail de déformation durant chacune de ces 3 phases. Durant la première phase, la déformation plastique restant à sa valeur initiale  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(s)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \int_{t_0}^s (\underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s)) : \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(s) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(s) - \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^* : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}(s) - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) \end{aligned}$$

Durant la deuxième phase, on a

$$\mathcal{W}_2 = \int_s^{s+h} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t) dt.$$

Durant la troisième phase, la déformation plastique restant à la valeur  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3 &= \int_{s+h}^{t_1} (\underline{\underline{\varepsilon}}(t) - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h)) : \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^* : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* - \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(s+h) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(s+h) - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}(s+h)) \end{aligned}$$

Faisons la somme et appliquons le postulat de Drucker-Ilyushin, nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(s) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(s) - \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(s+h) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(s+h) + \int_s^{s+h} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t) dt \\ &\quad + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}(s+h) - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}(s) - \underline{\underline{\varepsilon}}^*). \end{aligned}$$

En divisant par  $h$  et en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , on obtient

$$0 \leq -\underline{\underline{\varepsilon}}(s) : \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(s) + \underline{\underline{\sigma}}(s) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(s) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s) : \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(s) + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p(s) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(s) - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p(s) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^*$$

Les trois premiers termes se simplifiant grâce à la relation contrainte déformation (5.7), il reste

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(s) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}(s) - \underline{\underline{\varepsilon}}^*) \geq 0$$

soit finalement

$$(\underline{\underline{\sigma}}(s) - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(s) \geq 0.$$

Cette inégalité doit donc être vraie pour tout  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  intérieur à  $\mathbb{S}$ , mais par continuité elle doit également être vraie pour tout  $\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}$ , ce qui est le principe du travail plastique maximal à l'instant  $s$ . On a donc bien

$$\text{Drucker-Ilyushin} \implies \text{Hill}.$$

Montrons la réciproque. Soit  $\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}$  et soit  $\underline{\underline{\varepsilon}}_0^p$  la déformation plastique initiale de l'élément de volume. Soumettons-le à un cycle compatible  $t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  tel que  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t_0) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t_1) = \underline{\underline{\varepsilon}}^* = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p$  et tel que l'évolution  $t \mapsto \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t)$  soit régulière, la déformation plastique finale étant  $\underline{\underline{\varepsilon}}_1^p$ . Calculons le travail de déformation  $\mathcal{W}$  au cours de cycle. Il s'agit de montrer que  $\mathcal{W} \geq 0$  dans la mesure où

$$(\underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t) \geq 0, \quad \forall t \in (t_0, t_1) \quad (5.12)$$

Calculons  $\mathcal{W}$  en utilisant la décomposition  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$  et le fait que c'est un cycle :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \int_{t_0}^{t_1} \underline{\underline{\sigma}}(t) : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t) + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t) dt + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}_1^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}_1^p) - \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t) dt - (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}_1^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}_1^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}_1^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t) dt + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}_1^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}_1^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p). \end{aligned}$$

Par conséquent, comme le tenseur de rigidité est positif, si (5.12) est satisfaite, alors  $\mathcal{W} \geq 0$  et on a bien montré la réciproque

$$\text{Hill} \implies \text{Drucker-Ilyushin}.$$

D'où l'équivalence entre le postulat et le principe.<sup>8</sup>

□

### 5.3.5 La convexité du domaine d'élasticité et la règle de normalité

Le principe du travail plastique maximal a des conséquences importantes puisqu'il impose que le domaine de réversibilité soit *convexe* et que la vitesse d'écoulement plastique soit orientée suivant

---

8. En re-parcourant la démonstration du *seulement si* on notera que c'est la dérivée à droite de la déformation et de la déformation plastique en  $s$  qui intervient dans les raisonnements, *i.e.*  $\lim_{h \downarrow 0} (\underline{\underline{\varepsilon}}^p(s+h) - \underline{\underline{\varepsilon}}^p(s))/h$  et  $\lim_{h \downarrow 0} (\underline{\underline{\varepsilon}}(s+h) - \underline{\underline{\varepsilon}}(s))/h$ . Il n'est pas nécessaire que  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  soient dérivables en  $s$ . On peut donc étendre l'inégalité de Hill aux instants où les déformations et les déformations plastiques sont seulement dérivables à droite.



la *normale extérieure* au domaine. Autrement dit, dans le cas où le domaine de réversibilité est à frontière régulière (*i.e.* il admet un hyperplan tangent en tout point de sa frontière), ceci fixe la direction d'écoulement plastique  $\underline{\underline{g}}$  et réduit considérablement la part d'arbitraire de la loi d'évolution. La démonstration de ces deux propriétés de convexité et de normalité est techniquement difficile, mais elle a le mérite de faire apparaître des caractérisations intéressantes du domaine de réversibilité liées à sa convexité. On a donc

**Convexité et normalité.** *Sous réserve d'une régularité suffisante du domaine de réversibilité et de la loi d'écoulement, un matériau élastique parfaitement plastique satisfait le principe du travail plastique maximal si et seulement si*

1. le domaine de réversibilité  $\mathbb{S}$  est convexe ;
2. la vitesse de déformation plastique  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$  appartient, quand elle est définie, au cône des normales extérieures à  $\partial\mathbb{S}$  en  $\underline{\underline{\sigma}}$ . En particulier quand  $\underline{\underline{\sigma}}$  est un point non anguleux du bord, on a

$$\boxed{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \dot{\eta} \geq 0.} \quad (5.13)$$

PREUVE. Pour démontrer ce résultat on a besoin de supposer que  $\mathbb{S}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{M}_s^3$  *non vide, fermeture de son intérieur*. On a de plus besoin de supposer que, quel que soit le point  $\underline{\underline{\sigma}}$  sur la frontière  $\partial\mathbb{S}$ , on peut trouver un processus de chargement tel qu'il existe un instant où l'état de contrainte est  $\underline{\underline{\sigma}}$  et où la vitesse de déformation plastique  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$  est définie et *non nulle*. Adoptons ces deux hypothèses et rappelons quelques propriétés d'un ensemble  $\mathbb{C}$  *convexe fermé d'intérieur non vide* de  $\mathbb{M}_s^3$  :

1. L'intérieur de  $\mathbb{C}$  est convexe et  $\mathbb{C}$  est sa fermeture ;
2. Quel que soit  $\underline{\underline{\sigma}}$  sur la frontière  $\partial\mathbb{C}$ , il existe des directions *non nulles*  $\underline{\underline{g}} \in \mathbb{M}_s^3$  telles que  $\mathbb{C}$  soit situé dans le demi-espace fermé passant par  $\underline{\underline{\sigma}}$  et d'orientation  $\underline{\underline{g}}$ , *i.e.*

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{C}, \quad (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{g}} \geq 0.$$

3. L'ensemble  $\mathbb{N}_{\underline{\underline{\sigma}}}$  de telles directions  $\underline{\underline{g}}$  auxquelles on rajoute  $\underline{\underline{0}}$  constitue un *cône convexe fermé* dans  $\mathbb{M}_s^3$  appelé cône des normales extérieures, *i.e.*

$$\forall \underline{\underline{g}}, \underline{\underline{g}}' \in \mathbb{N}_{\underline{\underline{\sigma}}}, \quad \forall \eta, \eta' \geq 0, \quad \eta \underline{\underline{g}} + \eta' \underline{\underline{g}}' \in \mathbb{N}_{\underline{\underline{\sigma}}}.$$

4. Aux points réguliers  $\underline{\underline{\sigma}}$  de la frontière  $\partial\mathbb{C}$  où la normale extérieure  $\underline{\underline{g}}$  est définie, on a  $\mathbb{N}_{\underline{\underline{\sigma}}} = \{\eta \underline{\underline{g}} : \eta \geq 0\}$ . En particulier quand  $\mathbb{S}$  est défini par  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ , on peut prendre  $\underline{\underline{g}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ .

5.  $\mathbb{C}$  est égal à l'intersection des demi-espaces s'appuyant sur sa frontière, *i.e.*

$$\mathbb{C} = \bigcap_{\underline{\underline{\sigma}} \in \partial\mathbb{C}} \left\{ \bigcap_{\underline{\underline{g}} \in \mathbb{N}_{\underline{\underline{\sigma}}}} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{M}_s^3 : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{g}} \geq 0 \right\} \right\}.$$

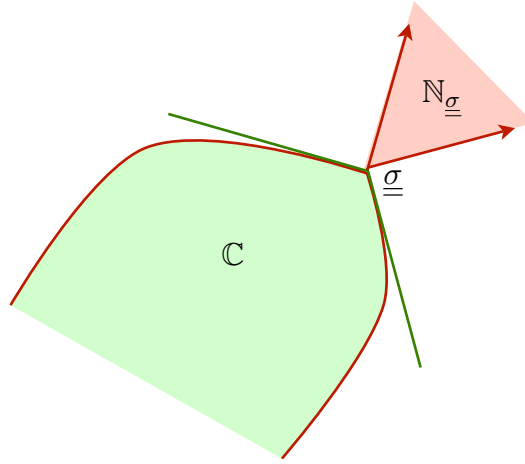


FIGURE 5.16 – Cône (en rouge) des normales extérieures en un point anguleux du bord d'un convexe.

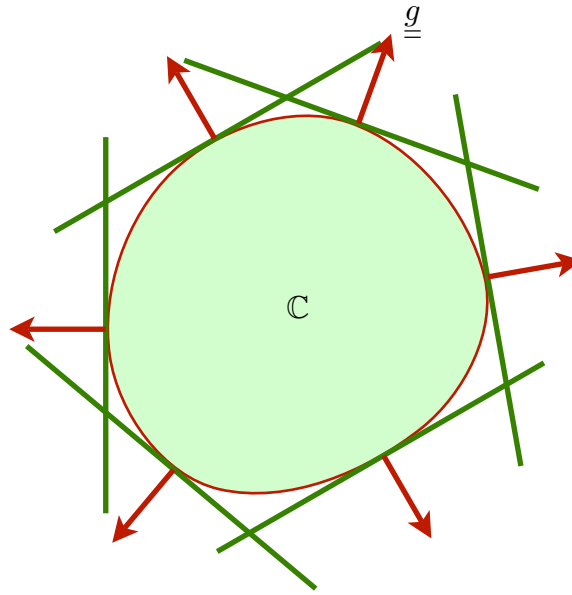


FIGURE 5.17 – Caractérisation d'un convexe par l'intersection des demi-espaces tangents.

Démontrons d'abord le si. Si  $S$  est convexe fermé d'intérieur non vide, alors on peut définir le cône  $N_{\underline{\sigma}}$  des normales extérieures en  $\underline{\sigma} \in \partial S$ . Si  $\underline{\underline{\epsilon}}^p \in N_{\underline{\sigma}}$ , alors par définition on a

$$\forall \underline{\sigma}^* \in S, \quad (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\underline{\epsilon}}^p \geq 0$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité de Hill. Démontrons maintenant le seulement si. Par hypothèse  $S$  est non vide, fermeture de son intérieur et pour tout  $\underline{\sigma} \in \partial S$  il existe  $\underline{\underline{\epsilon}}^p \neq \underline{0}$  tel que  $\forall \underline{\sigma}^* \in S, (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\underline{\epsilon}}^p \geq 0$ . Considérons le demi-espace fermé passant par  $\underline{\sigma}$  et d'orientation  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$ , et définissons l'ensemble  $C$  comme

l'intersection de tous ces demi-espaces lorsque  $\underline{\underline{\sigma}}$  décrit  $\partial\mathbb{S}$  :

$$\mathbb{C} = \bigcap_{\underline{\underline{\sigma}} \in \partial\mathbb{S}} \{ \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{M}_s^3 : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \geq 0 \}.$$

$\mathbb{C}$  est convexe fermé puisqu'intersection de convexes fermés. D'après l'inégalité de Hill,  $\mathbb{S}$  est contenu dans chaque demi-espace et donc dans leur intersection. Donc  $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ . Comme  $\mathbb{S}$  est d'intérieur non vide,  $\mathbb{C}$  également.

Il nous suffit de montrer que  $\overset{\circ}{\mathbb{S}} = \overset{\circ}{\mathbb{C}}$ . En effet, dans ce cas, en prenant la fermeture, on aura  $\mathbb{S} = \mathbb{C}$  et donc  $\mathbb{S}$  sera convexe fermé d'intérieur non vide. De plus l'inégalité de Hill (5.10) signifie alors simplement que, aux instants où elle est définie,  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \in \mathbb{N}_{\underline{\underline{\sigma}}}$  par définition du cône des normales extérieures à  $\mathbb{S}$  en  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

Montrons tout d'abord que  $\partial\mathbb{S} \subset \partial\mathbb{C}$  par contradiction. Supposons qu'il existe  $\underline{\underline{\sigma}} \in \partial\mathbb{S}$  qui soit intérieur à  $\mathbb{C}$ . On peut alors trouver une boule de centre  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de rayon  $r > 0$  incluse dans  $\mathbb{C}$ . Elle est donc aussi dans tous les demi-espaces servant à définir  $\mathbb{C}$ . Par conséquent pour tout  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  de cette boule, on a  $(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \geq 0$ . Mais ceci n'est possible que si  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \underline{\underline{0}}$  ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc  $\partial\mathbb{S} \subset \partial\mathbb{C}$ .

Pour montrer que  $\overset{\circ}{\mathbb{S}} = \overset{\circ}{\mathbb{C}}$ , on procède par contradiction sachant déjà que  $\overset{\circ}{\mathbb{S}} \subset \overset{\circ}{\mathbb{C}}$ . Supposons qu'il existe  $\underline{\underline{\sigma}}$  intérieur à  $\mathbb{C}$  mais pas intérieur à  $\mathbb{S}$ . Alors  $\underline{\underline{\sigma}}$  est extérieur à  $\mathbb{S}$  (il ne peut pas être sur sa frontière puisqu'elle incluse dans celle de  $\mathbb{C}$ ). Prenons maintenant  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  intérieur à  $\mathbb{S}$  et donc à  $\mathbb{C}$ . Comme l'intérieur de  $\mathbb{C}$  est convexe, le segment joignant  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  à  $\underline{\underline{\sigma}}$  est intérieur à  $\mathbb{C}$ . Mais ce segment joint un point intérieur à  $\mathbb{S}$  à un point extérieur à  $\mathbb{S}$ . Il passe donc par la frontière de  $\mathbb{S}$ . On aurait donc trouvé un point qui soit sur la frontière de  $\mathbb{S}$  tout en étant intérieur à  $\mathbb{C}$ , ce qui est impossible puisque  $\partial\mathbb{S} \subset \partial\mathbb{C}$ . Donc  $\overset{\circ}{\mathbb{S}} = \overset{\circ}{\mathbb{C}}$ .  $\square$

### 5.3.6 Incompressibilité plastique et non bornitude du domaine d'élasticité

Pour les métaux où les mécanismes élémentaires de déformation plastique sont les mouvements des dislocations, ces mouvements se font à volume constant ce qui suggère d'adopter pour eux l'hypothèse d'*incompressibilité plastique* :

**Définition de l'incompressibilité plastique.** *L'écoulement plastique est dit incompressible si, à tout instant,  $\text{Tr } \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = 0$ <sup>9</sup>.*

Comme le principe du travail plastique maximal lie l'écoulement à la forme du critère, l'incompressibilité plastique est équivalente à une propriété d'invariance par translation du domaine de réversibilité.

**Propriété.** *Un matériau élastique parfaitement plastique qui satisfait le principe du travail plastique maximal a un écoulement plastique incompressible si et seulement si le domaine de réversibilité est invariant par translation dans la direction des tenseurs sphériques, i.e.*

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}, \forall p \in \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* + p\underline{\underline{I}} \in \mathbb{S} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \quad \text{Tr } \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p(t) = 0.$$

PREUVE. Montrons l'implication  $\implies$ . Soit  $\underline{\underline{\sigma}} \in \partial\mathbb{S}$ , prenons  $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}} - p\underline{\underline{I}}$  avec  $p \in \mathbb{R}$ . En reportant dans (5.10) il vient  $p \text{Tr } \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \geq 0$ . Mais comme  $p$  est arbitraire, on a nécessairement  $\text{Tr } \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = 0$ .

9. Rappelons qu'en petites transformations  $\text{Tr } \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  représente la dilatation volumique, i.e. la variation relative de volume. Donc  $\text{Tr } \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$  peut être vue comme la contribution plastique de cette dilatation.

Montrons l'implication  $\Leftarrow$ . Utilisons la caractérisation de  $\mathbb{S}$  obtenue dans la démonstration de la Propriété de convexité, page 96, en adoptant les mêmes hypothèses. Le domaine de réversibilité est l'intersection des demi-espaces s'appuyant sur sa frontière,

$$\mathbb{S} = \bigcap_{\underline{\sigma} \in \partial \mathbb{S}} \{ \underline{\sigma}^* \in \mathbb{M}_s^3 : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\dot{\epsilon}}^p \geq 0 \}.$$

Soit  $\underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}$ , il appartient donc à tous les demi-espaces. Comme  $\text{Tr } \underline{\dot{\epsilon}}^p = 0$ , on a  $(\underline{\sigma}^* + p\underline{I}) : \underline{\dot{\epsilon}}^p = \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\epsilon}}^p$  pour tout  $p \in \mathbb{R}$ . Donc  $\underline{\sigma}^* + p\underline{I}$  appartient aussi à tous les demi-espaces et donc à leur intersection. D'où  $\underline{\sigma} + p\underline{I}$  est dans  $\mathbb{S}$ .  $\square$

## 5.4 Les lois standards de Von Mises et de Tresca

Les deux critères de plasticité les plus usités pour les métaux sont le *critère de Von Mises* et le *critère de Tresca*. Tous deux sont des critères convexes, isotropes et invariants par translation dans la direction des tenseurs sphériques. Le premier est à frontière régulière alors que le deuxième présente des coins. Nous les introduisons, puis les comparons.

### 5.4.1 Le modèle standard de Von Mises

#### Le critère de Von Mises

Le critère de Von Mises s'exprime en termes de la *contrainte équivalente*  $\sigma_{eq}$  qui est, à un facteur multiplicatif près, la norme euclidienne du déviateur des contraintes,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{s} : \underline{s}}, \quad \underline{s} = \underline{\sigma} - \frac{\text{Tr } \underline{\sigma}}{3} \underline{I}. \quad (5.14)$$

**ASTUCE:** Le calcul de la contrainte équivalente ne nécessite pas le calcul du déviateur si l'on remarque que

$$\underline{s} : \underline{s} = \underline{\sigma} : \underline{\sigma} - (\text{Tr } \underline{\sigma})^2 / 3$$

Le domaine de réversibilité associé au critère de Von Mises est défini par

$$\mathbb{S} = \{ \underline{\sigma} \in \mathbb{M}_s^3 : \sigma_{eq} \leq \sigma_c \} \quad (5.15)$$

où  $\sigma_c$  est la contrainte critique du matériau.

**Propriétés du critère de Von Mises.** *Le domaine de réversibilité associé au critère de Von Mises est convexe, isotrope, invariant par translation dans la direction des tenseurs sphériques et centré en  $\underline{0}$ .*

La démonstration complète de ces propriétés est laissée à titre d'exercice. Indiquons simplement que : (i) La convexité du critère tient à la convexité de la norme euclidienne ; (ii) L'isotropie tient à l'invariance de la norme euclidienne ; (iii) L'invariance par translation tient au fait que  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\sigma} + p\underline{I}$  ont le même déviateur ; (iv) La symétrie tient au fait que  $\underline{\sigma}$  et  $-\underline{\sigma}$  ont la même contrainte équivalente.

**Exercice 5.5.** Démontrer rigoureusement ces propriétés du critère de Von Mises.

### La loi d'écoulement

Si l'on adopte le principe du travail plastique maximal et donc la règle de normalité, la loi d'écoulement associée au critère de Von Mises s'écrit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{3\dot{\eta}}{2\sigma_c} \underline{\underline{s}} \quad , \quad \begin{cases} \dot{\eta} = 0 & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_c \\ \dot{\eta} \geq 0 & \text{si } \sigma_{eq} = \sigma_c \end{cases} . \quad (5.16)$$

En effet, en posant  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{eq} - \sigma_c$ , on a  $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{3\underline{\underline{s}}}{2\sigma_{eq}}$  quand  $\underline{\underline{\sigma}} \neq \underline{\underline{0}}$ . On a bien  $\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^p = 0$  conformément à la Propriété 5.3.6.

**Exercice 5.6.** Montrer que le multiplicateur plastique  $\dot{\eta}$  dans la loi d'écoulement de Von Mises est égal au taux de déformation plastique cumulée  $\dot{p}$ , cf (5.9).

### La relation contrainte-déformation

Complétons le modèle de Von Mises par la relation contrainte-déformation. Comme le critère de plasticité est isotrope, il est raisonnable de considérer que le comportement élastique l'est également. Du fait de l'incompressibilité plastique,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  est un déviateur et la relation contrainte-déformation s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (5.17)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. En l'inversant, on obtient

$$\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p = -\frac{\nu}{E} \text{Tr } \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.18)$$

Le modèle de Von Mises est donc défini par les trois relations de comportement (5.15)–(5.17). On se propose de l'étudier sur les problèmes d'évolution associés à des essais uni-axiaux et bi-axiaux.

### Essai uniaxial

C'est un processus de chargement mixte où on suppose que les contraintes sont uniaxiales mais où on contrôle la composante du tenseur de déformation correspondante. On suppose donc que  $\underline{\underline{\sigma}}(t) = \sigma(t)\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1$  tout en se donnant  $\varepsilon_{11} = \varepsilon(t)$ . L'élément de volume est dans son état naturel sans déformation plastique au début du processus de chargement.

- Le critère s'écrit  $|\sigma(t)| \leq \sigma_c$ , ce qui permet d'interpréter  $\sigma_c$  comme le seuil de plastification en traction. (Ceci explique aussi la présence du facteur 3/2 dans la définition de la norme équivalente.)
- Comme le déviateur des contraintes s'écrit  $\underline{\underline{s}}(t) = \sigma(t)\underline{\underline{J}}$  avec

$$\underline{\underline{J}} = \frac{2}{3}\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 - \frac{1}{3}\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 - \frac{1}{3}\underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3$$

et donc a une direction fixe, la loi d'écoulement donne que le tenseur de déformation plastique est aussi proportionnel à  $\underline{\underline{J}}$  et donc peut s'écrire

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) = \frac{3}{2} \varepsilon^p(t) \underline{\underline{J}}.$$

- On tire de la relation contrainte-déformation que le tenseur de déformation élastique est donné par

$$E \underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) = \sigma(t) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \nu \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \nu \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$$

où  $E$  est le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

- Enfin, on tire de la décomposition de la déformation, la relation entre  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^p$  :

$$\sigma(t) = E(\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t)), \quad (5.19)$$

la loi d'évolution de  $\varepsilon^p$  s'écrivant

$$|\sigma(t)| \leq \sigma_c, \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}^p(t) = 0 & \text{si } |\sigma(t)| < \sigma_c \\ \dot{\varepsilon}^p(t) \geq 0 & \text{si } \sigma(t) = \sigma_c \\ \dot{\varepsilon}^p(t) \leq 0 & \text{si } \sigma(t) = -\sigma_c \end{cases}. \quad (5.20)$$

On reconnaît dans (5.19)-(5.20) exactement les équations régissant l'évolution du modèle patin-ressort. On peut donc appliquer tous les résultats obtenus pour ce modèle.

**Conclusion :** Dans un essai de contrainte uniaxiale, le modèle standard d'élasto-plasticité parfaite de Von Mises se comporte comme le modèle rhéologique patin-ressort.

## Essai bi-axial

On va calculer et comparer la réponse d'un matériau soumis à deux essais bi-axiaux qui diffèrent par le chemin de chargement. Cela va permettre d'une part d'illustrer tous les concepts introduits et d'autre part de montrer qu'à cause de l'irréversibilité la réponse dépend en général du trajet de chargement. Durant ces deux essais l'état de contrainte est bi-axial et le tenseur des contraintes est diagonal dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , ce qui permet de l'écrire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2.$$

Par conséquent, la contrainte équivalente est donnée par

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2.$$

Le critère de Von Mises s'écrit donc

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_c^2.$$

Ceci correspond à une ellipse du plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$  dont le demi grand axe est suivant la première bissectrice et vaut  $\sqrt{2}\sigma_c$  et le demi petit axe est orienté suivant la deuxième bissectrice et vaut  $\sqrt{2/3}\sigma_c$ . Cette

ellipse d'excentricité  $\sqrt{2/3}$  passe par les points  $(\sigma_c, 0)$ ,  $(\sigma_c, \sigma_c)$  et donc par symétrie par  $(0, \sigma_c)$ ,  $(-\sigma_c, 0)$ ,  $(0, -\sigma_c)$  et  $(-\sigma_c, -\sigma_c)$ .

Le matériau étant isotrope, on déduit de la relation contrainte-déformation et de la loi d'écoulement plastique que  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  sont également diagonales dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , ce qui permet de les écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \varepsilon_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \varepsilon_1^p \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_2^p \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \varepsilon_3^p \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

les composantes 33 étant en général non nulles à cause du coefficient de Poisson et de l'incompressibilité plastique. Précisément, on a

$$\begin{cases} E(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^p) = \sigma_1 - \nu \sigma_2 \\ E(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^p) = \sigma_2 - \nu \sigma_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varepsilon_1^p = \eta \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_c} \\ \varepsilon_2^p = \eta \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_c} \end{cases}, \quad (5.21)$$

les deux autres relations ne servant qu'à calculer  $\varepsilon_3$  et  $\varepsilon_3^p$  :

$$\varepsilon_3^p = -(\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p), \quad \varepsilon_3 = -(\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p) - \nu \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E}.$$

Il est utile aussi de représenter le domaine de réversibilité  $\mathbb{E}$  ou plus précisément son image dans le plan  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Après un petit calcul utilisant (5.21) on obtient que le vecteur  $\underline{\underline{\varepsilon}} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  doit appartenir à l'ellipse suivante, dont le centre est  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p = (\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p)$  et dont les axes sont parallèles aux première et deuxième bissectrices :

$$\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p))^2}{4(1 - \nu)^2} + \frac{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p))^2}{4(1 + \nu)^2} \leq \varepsilon_c^2$$

où  $\varepsilon_c = \sigma_c/E$ . Cette ellipse garde une forme, une taille et une orientation fixe, mais se translate quand la déformation plastique évolue, ce qui correspond à un écrouissage cinématique dans l'espace des déformations (mais il n'y a pas d'écrouissage dans l'espace des contraintes puisque le domaine  $\mathbb{S}$  est fixe). Notons que sa forme et sa taille dépendent du coefficient de Poisson. Est représentée sur la Figure 5.18 l'ellipse quand  $\varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = 0$  pour  $\nu = 0.25$  (l'ellipse  $\mathbb{E}_0$  a alors une excentricité trois fois plus faible que celle de Von Mises  $\mathbb{S}$  et s'apparente à un cercle).

**Essai bi-axial asymétrique** Le processus de chargement comprend 2 phases :

1. Durant la première phase, on reprend l'essai uni-axial précédent où seule la composante  $\sigma_{11}$  des contraintes est non nulle et où on contrôle la déformation  $\varepsilon_{11}$  en la faisant croître de 0 à une valeur maximale  $\varepsilon_*$  telle qu'il y ait plastification.
2. Durant la deuxième phase, on bloque la contrainte  $\sigma_{11}$  à la valeur critique  $\sigma_c$  et on tire dans la direction 2 de façon à ce que seules  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  soient non nulles. On contrôle la déformation  $\varepsilon_{22}$  en la faisant croître de la valeur atteinte à la fin de la première phase jusqu'à  $\varepsilon_*$ .

Calculons la réponse durant les différentes phases.

1. *Première phase élastique.* Au début de la première phase, la réponse est élastique. Du fait du chargement uniaxial, on a  $\sigma_1 = E\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = 0$ . La réponse dans le plan des déformations et des contraintes est un segment de droite (en vert sur la Figure 5.19.) Cette phase cesse quand les déformations et les contraintes arrivent sur la frontière du domaine de réversibilité, *i.e.* quand  $\varepsilon_1 = \varepsilon_c$  et  $\sigma_1 = \sigma_c$ .

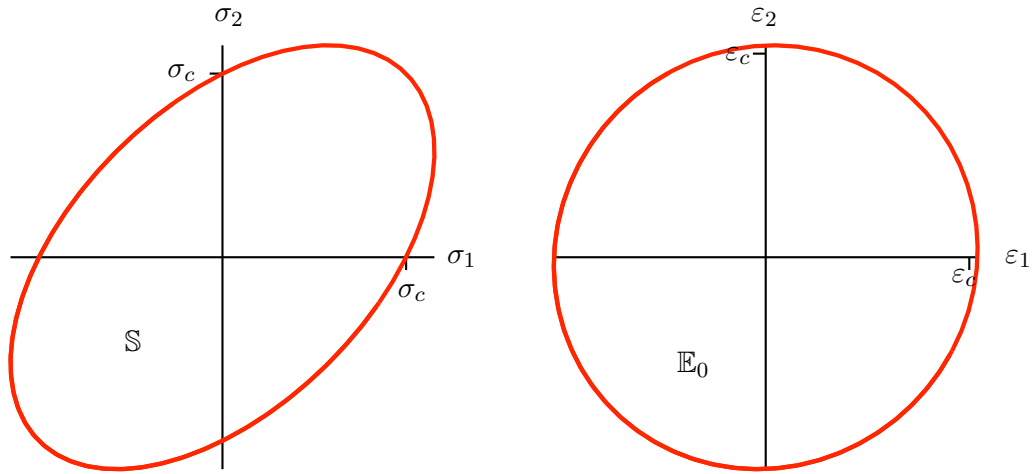


FIGURE 5.18 – L’ellipse de Von Mises dans un essai à contraintes bi-axiales et son image dans le plan des déformations associées en l’absence de déformation plastique (pour  $\nu = 0.25$ ).

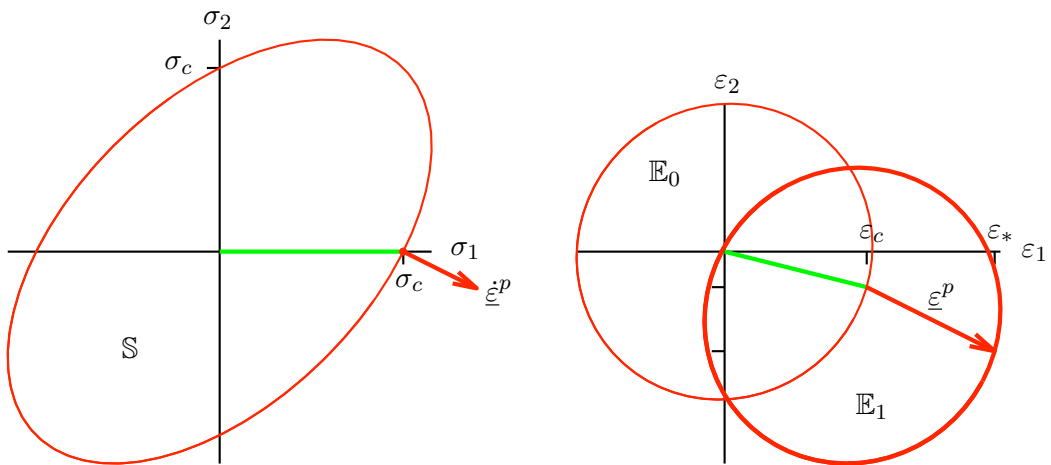


FIGURE 5.19 – La réponse du matériau lors de la première phase de chargement de l’essai-biaxial asymétrique (en vert le trajet correspondant à la phase élastique). À gauche : dans le plan des contraintes ; à droite : dans le plan des déformations.

2. *Première phase de plastification.* Lorsque  $\varepsilon_1$  dépasse  $\varepsilon_c$ , le matériau commence à plastifier. Comme on impose aux contraintes de rester uniaxiales, l’état de contrainte ne varie pas et le vecteur  $\underline{\sigma}$  le représentant dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$  reste  $(\sigma_c, 0)$ . Par contre les déformations et les



déformations plastiques varient et on a

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon_1 - \varepsilon_c, \quad \varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_c), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2} + (1 - 2\nu)\frac{\varepsilon_c}{2}.$$

Le domaine de réversibilité se translate dans le plan des déformations suivant la direction fixe  $(2, -1)$  donnée par la règle de normalité, cf Figure 5.19.

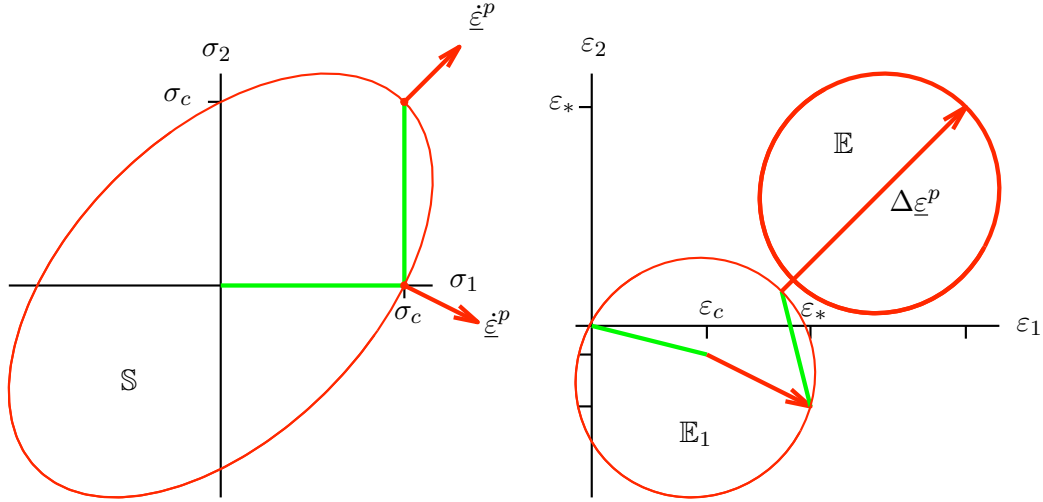


FIGURE 5.20 – La réponse du matériau lors des deux phases de chargement de l’essai-biaxial asymétrique (en vert le trajet correspondant à la phase élastique). À gauche : dans le plan des contraintes ; à droite : dans le plan des déformations.

3. *Deuxième phase élastique.* Montrons que la plastification s’arrête lorsqu’on commence à faire croître  $\varepsilon_2$  en maintenant  $\sigma_1 = \sigma_c$ . Sinon, si la plastification continuait, l’état de contrainte devrait rester en  $(\sigma_c, 0)$ . De plus d’après la loi d’écoulement, on devrait avoir  $\dot{\varepsilon}_2^p \leq 0$ . Mais alors on aurait  $\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_2^p \leq 0$ , d’où la contradiction. Durant cette phase élastique, on a donc  $\dot{\sigma}_2 = E\dot{\varepsilon}_2 > 0$ . La contrainte  $\sigma_2$  croît et la phase s’arrêtera lorsque  $\sigma_2 = \sigma_c$ . Comme  $\dot{\varepsilon}_1 = -\nu\dot{\varepsilon}_2$ , les déformations décrivent un segment de droite de pente  $-1/\nu$  jusqu’à atteindre le bord de l’ellipse  $\mathbb{E}_1$ , cf Figure 5.20. À ce moment-là, l’état du matériau est

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_* - \nu\varepsilon_c \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_* + (\frac{3}{2} - \nu)\varepsilon_c \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_c \\ \sigma_c \end{pmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} \varepsilon_* - \varepsilon_c \\ -\frac{1}{2}(\varepsilon_* - \varepsilon_c) \end{pmatrix}.$$

4. *Deuxième phase de plastification.* Lorsque  $\sigma_2$  atteint  $\sigma_c$ , comme les contraintes ne peuvent sortir de l’ellipse de Von Mises, les contraintes restent bloquées en  $(\sigma_c, \sigma_c)$  et le matériau plastifie à nouveau. La direction de la vitesse de déformation plastique est donnée par la règle de normalité et est donc  $(1, 1)$ . Lorsque  $\varepsilon_2 = \varepsilon_*$ , les incréments de  $\varepsilon_1^p$  et de  $\varepsilon_2^p$  seront égaux à

$$\Delta\varepsilon_1^p = \Delta\varepsilon_2^p = \Delta\varepsilon_2 = \frac{3}{2}(\varepsilon_* - \varepsilon_c) + \nu\varepsilon_c$$

et l'état final du matériau est

$$\underline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \frac{5}{2}(\varepsilon_* - \varepsilon_c) + \varepsilon_c \\ \varepsilon_* \end{vmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_c \\ \sigma_c \end{vmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}^p = \begin{vmatrix} \frac{5}{2}(\varepsilon_* - \varepsilon_c) + \nu\varepsilon_c \\ \varepsilon_* - \varepsilon_c + \nu\varepsilon_c \end{vmatrix}. \quad (5.22)$$

L'ensemble du processus d'évolution est présenté sur la Figure 5.20.

**Essai bi-axial symétrique** Le deuxième trajet de chargement consiste à imposer la même déformation dans les deux directions tout en laissant libre la troisième direction. On impose donc

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \sigma_3 = 0$$

avec  $\varepsilon$  croissant de 0 jusqu'à  $\varepsilon_*$ . Les directions 1 et 2 étant équivalentes, on aura donc par symétrie<sup>10</sup> :

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p := \varepsilon^p, \quad \varepsilon_3^p = -2\varepsilon^p, \quad \sigma_1 = \sigma_2 := \sigma, \quad \varepsilon_3 = -2\varepsilon^p - 2\nu\sigma/E.$$

Il reste à déterminer  $\sigma$  et  $\varepsilon^p$  en fonction de  $\varepsilon$ . La relation contrainte-déformation nous donne  $E(\varepsilon - \varepsilon^p) = (1 - \nu)\sigma$  et le critère s'écrit  $|\sigma| \leq \sigma_c$ . On se retrouve dans la situation du modèle patin-ressort avec  $E/(1 - \nu)$  comme raideur et  $\sigma_c$  comme seuil de glissement du patin. Par conséquent, l'évolution comprendra deux phases :

1. *Phase élastique* : Tant que  $\varepsilon \leq (1 - \nu)\varepsilon_c$ , le matériau ne plastifie pas,  $\varepsilon^p = 0$  et  $\sigma = E\varepsilon/(1 - \nu)$ .
2. *Phase de plastification* : Dès que  $\varepsilon > (1 - \nu)\varepsilon_c$ , le matériau plastifie,  $\sigma = \sigma_c$  et  $\varepsilon^p = \varepsilon - (1 - \nu)\varepsilon_c$ . L'état de contrainte n'évolue plus alors que le domaine de réversibilité  $\mathbb{E}$  se translate dans la direction  $(1, 1)$  donnée par la loi de normalité, cf Figure 5.21. L'état final du matériau à la fin du processus de chargement est

$$\underline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_* \\ \varepsilon_* \end{vmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_c \\ \sigma_c \end{vmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}^p = \begin{vmatrix} \varepsilon_* - \varepsilon_c + \nu\varepsilon_c \\ \varepsilon_* - \varepsilon_c + \nu\varepsilon_c \end{vmatrix}. \quad (5.23)$$

**Comparaison des deux essais bi-axiaux** Si l'on compare les états finaux donnés par (5.22) et (5.23), on voit que les contraintes et la déformation  $\varepsilon_2$  sont identiques. Par contre  $\varepsilon_1$  diffère d'un essai à l'autre et par voie de conséquence les déformations plastiques aussi. On voit ici l'importance du trajet de chargement sur la réponse du matériau. En raison de l'*irréversibilité* des phases de plastification, la réponse dépend en général de l'ordre des séquences. Notons que ce résultat était prévisible sans calcul à partir de l'observation du trajet des contraintes dans chaque essai. Montrons pour cela que l'on a nécessairement  $\varepsilon_1^p \neq \varepsilon_2^p$  à la fin de l'essai asymétrique alors que l'on a égalité à la fin de l'essai symétrique. Dans les deux essais le matériau plastifie quand  $\underline{\sigma} = (\sigma_c, \sigma_c)$  mais en plus dans l'essai asymétrique le matériau plastifie quand  $\underline{\sigma} = (\sigma_c, 0)$ . Or d'après la règle de normalité, on a  $\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\varepsilon}_2^p$  au point  $(\sigma_c, \sigma_c)$ , alors que  $\dot{\varepsilon}_1^p = -2\dot{\varepsilon}_2^p$  au point  $(\sigma_c, 0)$ . D'où la différence annoncée. Retenons de cet exemple l'idée suivante

**Conclusion** : Du fait de l'irréversibilité des phases de plastification, l'état final du matériau dépend en général de tout le trajet de chargement.

10. Cette propriété de symétrie de l'évolution peut évidemment se déduire des relations de comportement et n'a pas besoin d'être postulée. Cette déduction est laissée à titre d'exercice.

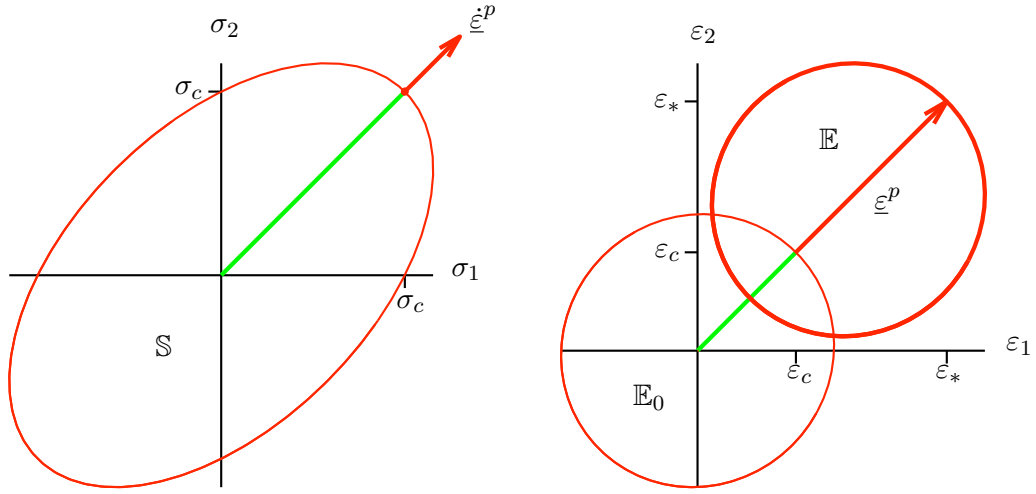


FIGURE 5.21 – La réponse du matériau lors des deux phases de chargement de l’essai-biaxial symétrique (en vert le trajet correspondant à la phase élastique). À gauche : dans le plan des contraintes ; à droite : dans le plan des déformations (pour  $\nu = 0.25$ ).

### 5.4.2 Le modèle standard de Tresca

#### Le critère de Tresca

Le critère de Tresca est aussi appelé *critère de cisaillement maximal*. Cette deuxième appellation renferme sa définition. Soit  $\underline{\sigma}$  un tenseur des contraintes et  $\underline{n}$  l’orientation d’une facette. La contrainte normale qui s’applique sur cette facette est  $\Sigma = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  et le vecteur cisaillement est  $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \Sigma \underline{n}$ . Le cisaillement maximal est donc  $\sup_{\underline{n}} \|\underline{T}\|$ . Si l’on représente le vecteur contrainte  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  dans le demi-plan de Mohr  $(\Sigma, \|\underline{T}\|)$ , l’extrémité de ce vecteur décrit le domaine délimité par les trois demi-cercles de Mohr quand  $\underline{n}$  décrit la sphère unité. Rappelons que ces cercles de Mohr sont définis par les trois contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ , cf Figure 5.22 où les contraintes principales ont été numérotées par ordre croissant :  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ . On voit que le cisaillement est atteint au pôle du plus grand cercle de Mohr et vaut donc

$$\sup_{\underline{n}} \|\underline{T}\| = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

Si l’on n’ordonne pas les contraintes principales, le domaine de réversibilité associé au critère de Tresca est défini par

$$\mathbb{S} = \left\{ \underline{\sigma} \in \mathbb{M}_s^3 : \sup_{i,j} (\sigma_i - \sigma_j) \leq \sigma_c \right\} \quad (5.24)$$

où  $\sigma_c$  est égal au double du cisaillement maximal que peut supporter le matériau.

**Propriétés du critère de Tresca.** *Le domaine de réversibilité associé au critère de Tresca est convexe, isotrope, invariant par translation dans la direction des tenseurs sphériques et centré en  $\underline{0}$ .*

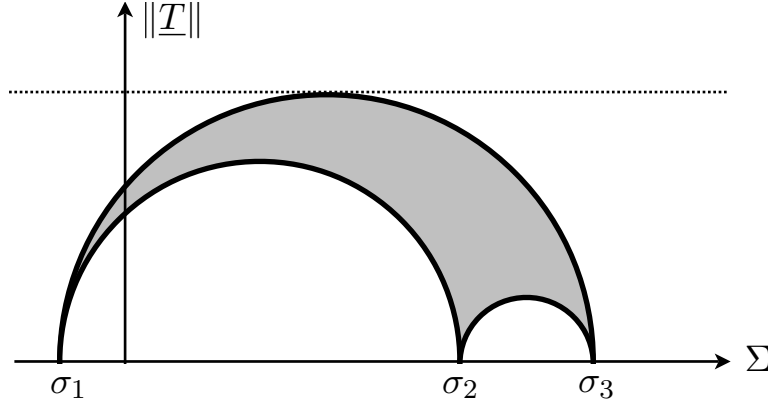


FIGURE 5.22 – Détermination du cisaillement maximal à l'aide des cercles de Mohr.

L'isotropie tient au fait que le critère ne fait intervenir que les contraintes principales qui sont invariantes par changement de base orthonormale. Si  $\sigma_i$  est une contrainte principale de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , alors  $\sigma'_i = \sigma_i + p$  est contrainte principale de  $\underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{I}}$ . D'où  $\sigma'_i - \sigma'_j = \sigma_i - \sigma_j$  et l'invariance du critère par toute translation suivant  $\underline{\underline{I}}$ . Comme  $-\sigma_i$  est contrainte principale de  $-\underline{\underline{\sigma}}$ , le critère est invariant par symétrie centrale. La seule propriété qui n'est pas évidente est la convexité. Utilisons la définition d'origine du critère de Tresca, *i.e.*  $\sup_n \|\underline{\underline{T}}\| \leq \sigma_c$ , qui peut aussi s'écrire

$$\|\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \sigma_{nn} \underline{n}\| \leq \sigma_c, \quad \forall \underline{n}, \|\underline{n}\| = 1.$$

Mais comme  $\|\theta \underline{\underline{T}} + (1 - \theta) \underline{\underline{T}}'\| \leq \theta \|\underline{\underline{T}}\| + (1 - \theta) \|\underline{\underline{T}}'\|$  pour tout  $\theta \in [0, 1]$ , tout  $\underline{\underline{T}}$  et tout  $\underline{\underline{T}}'$ , on a aussi

$$\|(\theta \underline{\underline{\sigma}} + (1 - \theta) \underline{\underline{\sigma}}') \cdot \underline{n} - (\theta \sigma_{nn} + (1 - \theta) \sigma'_{nn}) \underline{n}\| \leq \sigma_c, \quad \forall \underline{n}, \|\underline{n}\| = 1, \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

si  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'$  vérifient le critère. D'où la convexité.

### La loi d'écoulement

La principale difficulté d'utilisation du critère de Tresca tient à la non régularité de la surface seuil qui contient des coins qui correspondent aux  $\underline{\underline{\sigma}}$  ayant une contrainte principale double. L'écriture de la loi d'écoulement en est rendue plus difficile. Notons tout d'abord que le principe du travail plastique maximal implique la propriété suivante que nous admettrons sans démonstration :

**Propriété.** *Le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et la vitesse de déformation plastique  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$  admettent la même base orthonormée de vecteurs propres.*

De plus comme le critère de Tresca est invariant par translation dans la direction des tenseurs sphériques, on peut utiliser la Propriété 5.3.6 et l'écoulement plastique est nécessairement *incompressible*. Considérons  $\underline{\underline{\sigma}}$  au seuil de plastification en ordonnant ses valeurs propres, *i.e.*

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_c,$$

et écrivons l'inégalité de Hill pour des  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  admissibles et ayant mêmes directions principales que  $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\sum_i (\sigma_i - \sigma_i^*) \dot{\epsilon}_i^p \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* : \max_{i,j} (\sigma_i^* - \sigma_j^*) \leq \sigma_c. \quad (5.25)$$

Envisageons les différents cas de multiplicité de contraintes principales, sachant qu'il ne peut y avoir multiplicité triple des contraintes au seuil puisque  $\sigma_3 > \sigma_1$ .

1. *Contraintes principales simples* :  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ . En prenant  $\sigma_1^* = \sigma_1 - p$ ,  $\sigma_2^* = \sigma_2 - q$ ,  $\sigma_3^* = \sigma_3 - p$  avec  $p \in \mathbb{R}$  et  $|q|$  assez petit, on obtient  $p(\dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_3^p) + q\dot{\varepsilon}_2^p \geq 0$ , ce qui implique que  $\dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_3^p = 0$  et  $\dot{\varepsilon}_2^p = 0$ . Réciproquement, si  $\dot{\varepsilon}_1^p = -\dot{\eta}$ ,  $\dot{\varepsilon}_2^p = 0$  et  $\dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\eta}$ , alors (5.25) se réduit à  $(\sigma_c - \sigma_3^* + \sigma_1^*)\dot{\eta} \geq 0$  si  $|\sigma_3^* - \sigma_1^*| \leq \sigma_c$ . Elle est donc satisfaite si et seulement si  $\dot{\eta} \geq 0$ .
2. *Contraintes principales doubles* :  $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$ . En tenant compte de l'incompressibilité plastique, l'inégalité de Hill se réduit à

$$(\sigma_3^* - \sigma_1^* - \sigma_c)\dot{\varepsilon}_1^p + (\sigma_3^* - \sigma_2^* - \sigma_c)\dot{\varepsilon}_2^p \geq 0.$$

Elle est donc satisfaite pour tout  $\underline{\sigma}^*$  admissible si et seulement si  $\dot{\varepsilon}_1^p \leq 0$  et  $\dot{\varepsilon}_2^p \leq 0$ .

3. *Contraintes principales doubles* :  $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$ . En tenant compte de l'incompressibilité plastique, l'inégalité de Hill se réduit à

$$(\sigma_c + \sigma_1^* - \sigma_2^*)\dot{\varepsilon}_2^p + (\sigma_c + \sigma_1^* - \sigma_3^*)\dot{\varepsilon}_3^p \geq 0.$$

Elle est donc satisfaite pour tout  $\underline{\sigma}^*$  admissible si et seulement si  $\dot{\varepsilon}_2^p \geq 0$  et  $\dot{\varepsilon}_3^p \geq 0$ .

En résumé, la règle de normalité pour le critère de Tresca s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{\varepsilon}_1^p = -\dot{\eta} \leq 0, & \dot{\varepsilon}_2^p = 0, & \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\eta} \geq 0, \quad \text{si} \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 = \sigma_c + \sigma_1 \\ \dot{\varepsilon}_1^p = -\dot{\eta}_1 \leq 0, & \dot{\varepsilon}_2^p = -\dot{\eta}_2 \leq 0, & \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2, \quad \text{si} \quad \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3 = \sigma_c + \sigma_1 \\ \dot{\varepsilon}_1^p = -\dot{\eta}_2 - \dot{\eta}_3, & \dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\eta}_2 \geq 0, & \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\eta}_3 \geq 0, \quad \text{si} \quad \sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c + \sigma_1 \end{array} \right. \quad (5.26)$$

En supposant le matériau isotrope, la relation contrainte-déformation est la même que pour le modèle de Von Mises. Finalement, les relations de comportement caractérisant le modèle standard de Tresca sont (5.24), (5.26) et (5.17)-(5.18). On se propose d'illustrer ce modèle sur les mêmes essais uni-axiaux et bi-axiaux que pour le modèle de Von Mises.

### Essai uni-axial

Dans cet essai  $\underline{\sigma} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$  et on contrôle  $\varepsilon_{11} = \varepsilon(t)$ . Le critère de Tresca s'écrit donc  $|\sigma| \leq \sigma_c$  et  $\sigma_c$  s'interprète comme le seuil de plastification en traction. Nous sommes dans le cas d'une valeur propre double et, si  $\sigma = +\sigma_c$ , la loi d'écoulement (5.26) donne

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\eta}_2 + \dot{\eta}_3, \quad \dot{\varepsilon}_2^p = -\dot{\eta}_2 \leq 0, \quad \dot{\varepsilon}_3^p = -\dot{\eta}_3 \leq 0, \quad (5.27)$$

les inégalités changeant de signe si  $\sigma = -\sigma_c$ . Les relations contrainte-déformation s'écrivent

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_1^p), \quad -\nu\sigma = E(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^p), \quad -\nu\sigma = E(\varepsilon_3 - \varepsilon_3^p),$$

les deux dernières servant à calculer  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  une fois que la contrainte  $\sigma$  et les déformations plastiques sont connues.

Envisageons un chargement monotone où l'on fait croître  $\varepsilon$  depuis 0, le matériau étant dans son état naturel non plastifié au début du chargement. La réponse du matériau comporte deux phases

1. *Phase élastique* : Tant que  $\varepsilon \leq \varepsilon_c = \sigma_c/E$ , le matériau ne plastifie pas. On a

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon.$$

2. *Phase de plastification* : Dès que  $\varepsilon > \varepsilon_c$ , le matériau plastifie. La contrainte  $\sigma$  reste bloquée à la valeur critique  $\sigma_c$  et  $\varepsilon_1^p = \varepsilon - \varepsilon_c$ . Toutefois la loi d'évolution (5.27) ne permet pas de déterminer de façon unique  $\varepsilon_2^p$  et  $\varepsilon_3^p$ . En effet, prenons  $\theta \in [0, 1]$  et posons  $\varepsilon_2^p = -\theta(\varepsilon - \varepsilon_c)$  et  $\varepsilon_3^p = -(1 - \theta)(\varepsilon - \varepsilon_c)$ . Alors, il y a bien continuité en  $\varepsilon = \varepsilon_c$  et (5.27) est satisfaite. On a donc construit une famille (paramétrée par  $\theta$ ) de solutions au problème d'évolution de cet essai uniaxial. (Parmi toutes ces solutions il y a évidemment la solution "symétrique"  $\theta = 1/2$  où les directions 2 et 3 sont équivalentes.)

**Conclusion** : Dans l'essai uniaxial, on ne peut pas déterminer exactement l'évolution de la déformation plastique si le matériau est élastique parfaitement plastique et obéit au critère de Tresca.

La raison de l'existence d'une infinité de solutions tient au fait que l'on contrôle une partie des contraintes alors qu'on est en plasticité parfaite *et* que la surface seuil de Tresca comporte des coins. La présence de coins est essentielle puisque, si la surface est régulière, alors la règle de normalité fixe la direction d'évolution de la déformation plastique. Ainsi on avait unicité avec le modèle de Von Mises. Le fait que l'on contrôle certaines composantes des contraintes (ici  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) et donc pas ces composantes des déformations est également essentiel. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'essai bi-axial traité dans le paragraphe suivant où on contrôle  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  et où a unicité de la réponse. Enfin, le fait que l'on soit en plasticité parfaite est également important. En effet, en introduisant de l'écrouissage cinématique, on récupère l'unicité comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 5.7. (Modèle de Tresca avec écrouissage cinématique linéaire et règle de normalité)** On considère un matériau élasto-plastique écrouissable dont l'écrouissage cinématique linéaire est défini à partir du tenseur des contraintes internes  $\underline{\underline{X}} = H\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  où  $H > 0$  est le module d'écrouissage. Le critère est le critère de Tresca qui porte sur  $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}$  (et plus sur  $\underline{\underline{\sigma}}$ ) :

$$\mathbb{S} = \left\{ \underline{\underline{Y}} \in \mathbb{M}_s^3 : \sup_{i,j} (Y_i - Y_j) \leq \sigma_c \right\}.$$

On étend le principe du travail plastique maximal en demandant que l'inégalité suivante soit vérifiée à chaque instant :

$$(\underline{\underline{Y}} - \underline{\underline{Y}}^*) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{Y}}^* \in \mathbb{S}.$$

1. Rétablir la règle de normalité et montrer que la loi d'évolution consiste à remplacer dans (5.26) les contraintes principales  $\sigma_i$  par les contraintes internes principales  $Y_i$ .
2. Reprendre l'essai uniaxial où seule la composante  $\sigma_{11}$  des contraintes est non nulle et où on contrôle  $\varepsilon_{11}$ . Déterminer exactement l'évolution des contraintes, des déformations et des déformations plastiques lorsque  $\varepsilon_{11}$  croît depuis 0, le matériau partant de son état naturel non plastifié.

## Essai bi-axial

On considère un état biaxial des contraintes où  $\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$ . Le critère de Tresca s'écrit

$$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} \leq \sigma_c.$$

**ASTUCE:** Pour gérer ce type de critères contenant des max et des valeurs absolues, on a tout intérêt à remplacer les max par des  $\forall$  et les valeurs absolues par des  $\pm$ . Ainsi le critère de Tresca peut s'écrire :

$$-\sigma_c \leq \sigma_1 \leq \sigma_c, \quad -\sigma_c \leq \sigma_2 \leq \sigma_c, \quad -\sigma_c \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_c,$$

ce qui correspond à l'intersection de 6 demi-plans dont la construction est immédiate.

Le domaine de réversibilité est un hexagone du plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$  qui passe par les points  $(\sigma_c, 0)$ ,  $(\sigma_c, \sigma_c)$  et donc, par symétrie, par  $(0, \sigma_c)$ ,  $(-\sigma_c, 0)$ ,  $(0, -\sigma_c)$  et  $(-\sigma_c, -\sigma_c)$ . Il est contenu dans l'ellipse de Von Mises, cf Figure 5.23.

**Exercice 5.8.** Montrer en utilisant des arguments de convexité que l'hexagone de Tresca est contenu dans l'ellipse de Von Mises (pour la même valeur critique  $\sigma_c$ ).

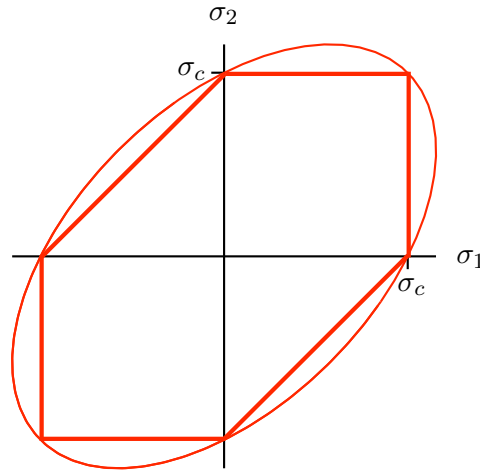


FIGURE 5.23 – L'hexagone de Tresca et l'ellipse de Von Mises dans un essai bi-axial.

On déduit de la loi d'écoulement (5.26) que, si le matériau est non plastifié au début de l'essai, le tenseur de déformation plastique sera toujours diagonal dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  et peut s'écrire

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \varepsilon_1^p \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_2^p \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \varepsilon_3^p \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3.$$

Sur les côtés de l'hexagone (sommets non compris) la loi de normalité donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } AB : \varepsilon_1^p \geq 0, \quad \varepsilon_2^p = 0 \\ \text{sur } BC : \varepsilon_1^p = 0, \quad \varepsilon_2^p \geq 0 \\ \text{sur } CA' : \varepsilon_2^p = -\varepsilon_1^p \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sur } A'B' : \varepsilon_1^p \leq 0, \quad \varepsilon_2^p = 0 \\ \text{sur } B'C' : \varepsilon_1^p = 0, \quad \varepsilon_2^p \leq 0 \\ \text{sur } C'A : \varepsilon_1^p = -\varepsilon_2^p \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.28)$$

alors qu'aux sommets le vecteur vitesse de déformation plastique  $\underline{\varepsilon}^p$  doit appartenir au cône des normales extérieures, cf Figure 5.24, ce qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En } A : \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p \geq 0, \quad \varepsilon_2^p \leq 0 \\ \text{En } B : \varepsilon_1^p \geq 0, \quad \varepsilon_2^p \geq 0 \\ \text{En } C : \varepsilon_1^p \leq 0, \quad \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{En } A' : \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p \leq 0, \quad \varepsilon_2^p \geq 0 \\ \text{En } B' : \varepsilon_1^p \leq 0, \quad \varepsilon_2^p \leq 0 \\ \text{En } C' : \varepsilon_1^p \geq 0, \quad \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p \leq 0 \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Les relations contrainte-déformation sont celles d'un matériau isotrope :

$$E(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^p) = \sigma_1 - \nu\sigma_2, \quad E(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^p) = \sigma_2 - \nu\sigma_1. \quad (5.30)$$

Calculons la réponse dans un **essai symétrique**, *i.e.* quand on impose  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  croissant de 0 à  $\varepsilon_*$ . La relation (5.30) donne

$$(1 - \nu^2)\sigma_1 = (1 + \nu)E\varepsilon - E(\varepsilon_1^p + \nu\varepsilon_2^p), \quad (1 - \nu^2)\sigma_2 = (1 + \nu)E\varepsilon - E(\varepsilon_2^p + \nu\varepsilon_1^p) \quad (5.31)$$

1. *Phase élastique* : Tant que  $\varepsilon < (1 - \nu)\varepsilon_c$ , les contraintes restent à l'intérieur de l'hexagone, il n'y a pas plastification et on a

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = E \frac{\varepsilon}{1 - \nu}.$$

2. *Phase de plastification* : Quand  $\varepsilon = (1 - \nu)\varepsilon_c$ , le vecteur contrainte  $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$  arrive au sommet  $B$  de l'hexagone. Montrons en s'appuyant sur la continuité de l'évolution qu'il reste nécessairement au point  $B$  quand  $\varepsilon > (1 - \nu)\varepsilon_c$ . Par l'absurde. Il le quitte soit en rentrant à l'intérieur de l'hexagone, soit en se déplaçant sur un des côtés  $BC$  ou  $BA$  de l'hexagone. Supposons qu'il le quitte en rentrant à l'intérieur. Alors, la déformation plastique n'évoluerait pas et, en vertu de (5.31),  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  devraient augmenter puisque  $\varepsilon$  augmente, ce qui est contradictoire avec le fait que  $\underline{\sigma}$  rentre à l'intérieur de l'hexagone. Supposons maintenant que  $\underline{\sigma}$  quitte  $B$  en se déplaçant sur le côté  $BC$ . Dans ce cas  $\sigma_2$  reste à la valeur  $\sigma_c$  et  $\sigma_1$  diminue. D'après (5.28),  $\varepsilon_1^p$  n'évolue pas. Donc, d'après (5.30),  $\sigma_1$  doit augmenter puisque  $\varepsilon$  augmente, ce qui contredit le fait que  $\underline{\sigma}$  va vers  $C$ . On démontre de même que  $\underline{\sigma}$  ne peut pas quitter  $B$  en se déplaçant sur le côté  $BA$ . Donc  $\underline{\sigma}$  reste en  $B$ . Mais alors, en vertu de (5.30), on a  $\varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = \varepsilon - (1 - \nu)\varepsilon_c$ . À la fin de l'essai, l'état du matériau sera donc

$$\underline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_* \\ \varepsilon_* \end{vmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_c \\ \sigma_c \end{vmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}^p = \begin{vmatrix} \varepsilon_* - \varepsilon_c + \nu\varepsilon_c \\ \varepsilon_* - \varepsilon_c + \nu\varepsilon_c \end{vmatrix}.$$

On peut noter qu'il y a donc unicité de la réponse, contrairement à l'essai uniaxial, et que cette réponse est celle fournie par le modèle standard de Von Mises.



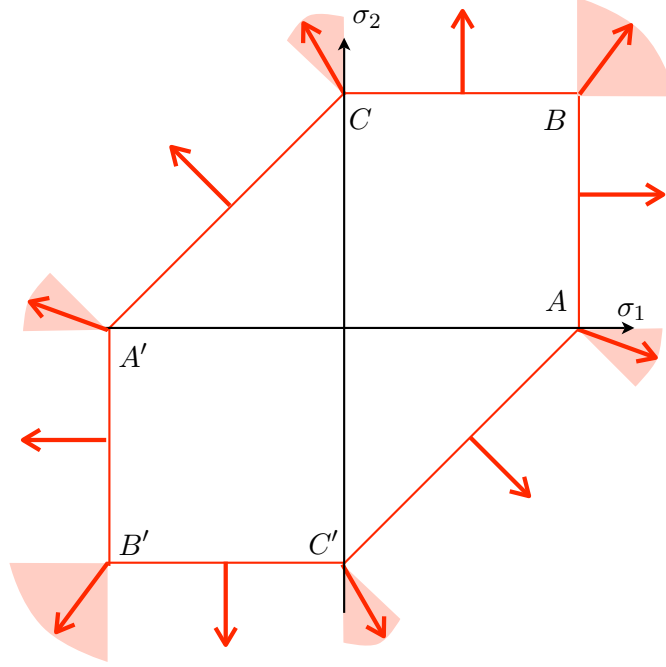


FIGURE 5.24 – La règle de normalité avec le critère de Tresca dans un essai bi-axial : sur les côtés de l'hexagone, la direction de la vitesse de déformation plastique  $\underline{\dot{\epsilon}}^p$  est unique ; aux sommets, elle est dans le cône des normales extérieures.

## 5.5 Identification expérimentale des critères de plasticité

Si un simple essai de traction suffit pour mesurer la contrainte critique  $\sigma_c$ , il faut avoir recours à des essais au moins bi-axiaux pour identifier le critère de plasticité. On peut aussi à l'occasion vérifier la validité de la règle de normalité. Un des essais couramment utilisé pour cela est l'*essai de traction-torsion*. Il est réalisé sur des tubes (minces) de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$  petite devant  $R$  de façon à ce que l'état de contrainte soit pratiquement homogène. Si l'on exerce la force de traction  $F$  et le couple de torsion  $M$ , l'état de contrainte dans la partie centrale de l'éprouvette sera approximativement égal à

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$$

dans le système de coordonnées cylindriques, avec  $F = 2\pi R e \sigma$  et  $M = 2\pi R^2 e \tau$ . Une méthodologie possible pour identifier le domaine de réversibilité (initial)  $\mathbb{S}$  est de procéder comme suit :

1. On fait un premier essai de traction simple en augmentant  $\sigma$  tout en maintenant  $\tau$  à 0 et on arrête lorsqu'on note une perte de linéarité de la réponse<sup>11</sup>. On obtient ainsi la limite en traction simple  $\sigma_t$ .
2. On fait la même chose en compression et on obtient ainsi  $-\sigma_c$ .

11. Cette perte de linéarité est repérée en effectuant régulièrement des décharges et en notant la déformation résiduelle à la fin de la décharge. Lorsque cette déformation résiduelle est plus grande qu'une valeur conventionnelle appelée *offset*, on considère que le matériau a plastifié.

3. On charge en traction (ou compression) simple jusqu'à un certain niveau  $\sigma_* \in (-\sigma_c, \sigma_t)$  à  $\tau = 0$ , puis on bloque  $\sigma$  à  $\sigma_*$  et on exerce une torsion croissante dans un sens ou dans l'autre. On mesure la valeur de  $\tau$  à partir de laquelle il y a perte de linéarité.

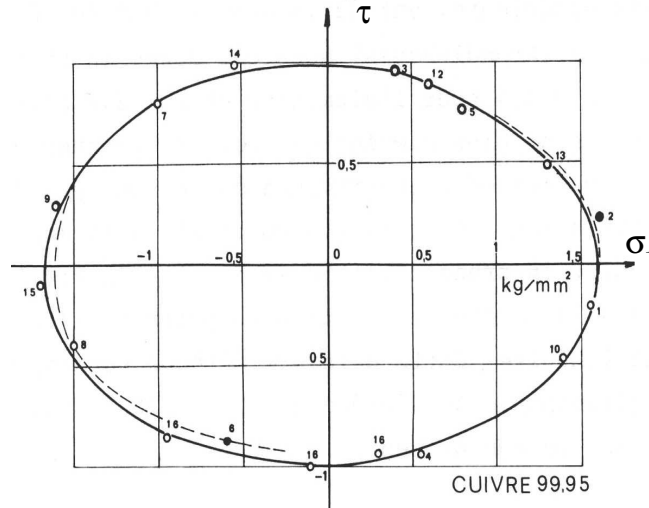


FIGURE 5.25 – Identification du domaine de réversibilité pour du cuivre dans un essai de traction-torsion, Bui (1970).

En procédant ainsi on obtient une famille de points expérimentaux situés sur  $\partial\mathcal{S}$ . Sur la figure 5.25 sont représentés les points obtenus par Bui pour du cuivre. On constate que la famille des points se trouvent approximativement sur une ellipse. Essayons de voir si cela peut correspondre au critère de Von Mises ou au critère de Tresca. Compte tenu de la forme du tenseur des contraintes, la contrainte équivalente et le cisaillement maximal sont donnés par

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad \max_{i,j}(\sigma_i - \sigma_j) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Chacun des deux critères prévoit donc une ellipse centrée en  $(0,0)$  et dont les axes sont les axes  $\sigma = 0$  et  $\tau = 0$ . Le rapport des axes est égal à  $\sqrt{3}$  pour l'ellipse de Von Mises et à 2 pour l'ellipse de Tresca. On voit sur la figure que les points expérimentaux sont pratiquement sur une ellipse de Von Mises.

On peut poursuivre l'expérience pour vérifier la loi de normalité et mesurer l'évolution du domaine de réversibilité. On suit la méthodologie précédente et on mesure la réponse en faisant un essai où la traction  $\sigma$  est augmentée jusqu'à une valeur  $\sigma_*$  à torsion nulle, puis où l'éprouvette est mise en torsion à traction constante. Le taux de déformation plastique est obtenu en mesurant la déformation résiduelle après décharge. On peut noter sur la figure 5.26 que la règle de normalité est vérifiée avec une précision tout à fait satisfaisante. On peut aussi obtenir l'évolution du domaine de réversibilité en suivant la même procédure que pour l'identification du domaine initial : on ramène la torsion à 0, on modifie la traction et on remet en torsion jusqu'à nouvelle plastification. On voit sur la figure 5.26 que le domaine de réversibilité ne reste plus elliptique, à la fois sa taille et sa forme sont changées. Ceci illustre toute la difficulté de bien modéliser l'écrouissage.

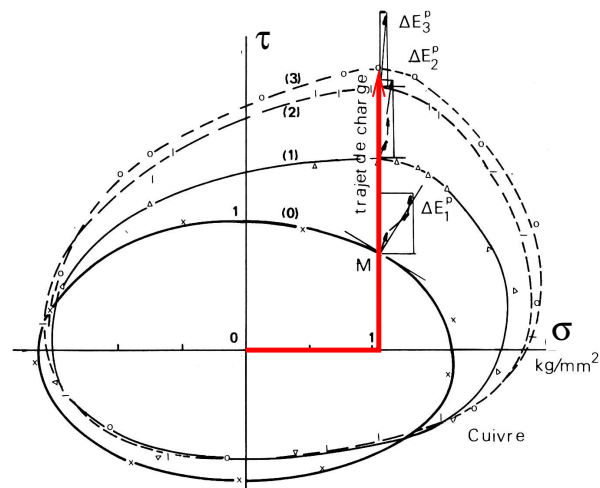


FIGURE 5.26 – Vérification de la règle de normalité pour du cuivre dans un essai de traction-torsion et mesure de l'évolution du domaine de réversibilité.

## Chapitre 6

# Calcul de structures élasto-plastiques

Une fois que le comportement du ou des matériaux a été identifié, il s'agit de calculer la réponse d'une structure constituée de tels matériaux lorsqu'elle est soumise à un processus de chargement. Dans le cas de matériaux élasto-plastiques, du fait de l'irréversibilité de leur comportement, la réponse dépend du trajet de chargement et pas seulement du chargement instantané comme c'est le cas en élasticité. Il faut donc formuler le problème comme un *problème d'évolution* avec comme données : (i) l'état de plastification initial de la structure ; (ii) la séquence de chargements imposés à partir de l'instant initial. Toutefois, les matériaux élasto-plastiques ayant, par définition, un comportement indépendant des vitesses, la réponse ne dépend pas de la vitesse de chargement, mais uniquement du trajet de chargement. On ne pourra donc pas rendre compte de phénomènes d'origine visqueuse comme le *fluage* où les contraintes évoluent alors que le chargement est fixé. Par contre, on pourra rendre compte de *contraintes résiduelles*, *i.e.* de contraintes qui demeurent dans la structure du fait des phases de plastification antérieures bien que l'on ait déchargé la structure. On peut aussi rendre compte de phénomènes de *fatigue* du fait de l'accumulation de déformations plastiques lors de *chargements cycliques*.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à ce problème d'évolution tout d'abord en le formulant, puis en le résolvant dans quelques cas simples avant d'en dégager quelques propriétés qualitatives générales. Parmi ces propriétés fondamentales, citons sur le plan mathématique les questions d'existence, d'unicité et de régularité de la réponse, et sur le plan physique les concepts d'*écrouissage structurel*, de *charge limite élastique*, de *charge limite* et de *bande de cisaillement*. Tant d'un point de vue physique que mathématique, certaines de ces propriétés qualitatives du problème d'évolution dépendent de façon essentielle de la présence ou non d'écrouissage du matériau, alors que d'autres sont communes aux deux types de comportement. Nous proposons aussi un algorithme de résolution numérique basé sur une propriété énergétique fondamentale.

## 6.1 Cas standard parfaitement plastique

### 6.1.1 Le problème d'évolution quasi-statique

**Le cadre et les données** Dans toute cette section, sauf mention expresse du contraire, la structure est supposée tridimensionnelle et occupe dans sa configuration de référence l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . On se placera dans le cadre de l'*hypothèse des petites perturbations*, les données et les équations sont formulées dans la configuration de référence et on "linéarise" les équations, cf Chapitre 1 et [30, 20]. L'autre hypothèse simplificatrice est celle de *quasi-staticité* : on néglige tous les effets d'inertie et on suppose qu'à chaque instant la structure est en équilibre.

Les matériaux constituant la structure ont un comportement élasto-plastique parfait obéissant au principe du travail maximal de Hill et sont donc caractérisés par la donnée de leur rigidité  $\underline{\underline{C}}(\underline{x})$  et de leur domaine de réversibilité  $\mathbb{S}(\underline{x})$ , convexe fermé fixe dans l'espace des contraintes contenant l'état de contraintes nulles<sup>1</sup>, ces données dépendant du point matériel  $\underline{x}$  si la structure est hétérogène.

La structure est soumise à un processus de chargement dépendant du temps. Du fait de l'indépendance du comportement vis à vis des vitesses, le temps est simplement ici un paramètre  $t$  servant à décrire la séquence des états du chargement et de la structure. En prenant 0 comme temps initial et  $T \in (0, +\infty)$  comme temps final, le processus de chargement consiste en la donnée des applications suivantes définies pour  $t \in [0, T)$

1. L'histoire  $t \mapsto \underline{f}(t)$  des forces volumiques ;
2. L'histoire des déplacements donnés  $t \mapsto \underline{\xi}^d(t)$  sur une partie du bord  $\partial_D \Omega$  que nous supposons indépendante du temps pour simplifier ;
3. L'histoire des forces surfaciques  $t \mapsto \underline{T}(t)$  imposées sur la partie complémentaire du bord  $\partial_N \Omega = \partial \Omega \setminus \partial_D \Omega$  (indépendante donc du temps) ;

Il est clair que ce type de conditions aux limites ne couvrent pas toutes les situations que l'on rencontre en pratique. On peut aussi envisager des situations où en un point de la frontière on impose certaines composantes du déplacement et les autres composantes du vecteur contrainte. Étendre la formulation à de telles situations ne présente pas de difficultés autres que d'écriture et les propriétés qualitatives n'en sont pas affectées.

La mise en charge doit être *progressive* ce qui demande que ces données dépendent régulièrement du temps (il faut qu'elles soient au moins continues) afin que l'on puisse calculer l'évolution de la déformation plastique. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la loi d'évolution élasto-plastique n'a un sens que dans la mesure où les contraintes, les déformations et les déformations plastiques évoluent continûment. Imposer brusquement un chargement à la structure ne permettrait pas de déterminer l'état de la structure juste après la mise en charge. Ceci rejoint l'idée que la réponse dépend du trajet de chargement et qu'il faut donc préciser comment on arrive à ce niveau de chargement. Cette remarque a des conséquences pratiques importantes. Considérons le cas de la pesanteur, chargement dominant dans de nombreuses structures du Génie Civil. On ne peut pas considérer que la structure est soumise dès l'instant initial à son poids propre  $\underline{f}(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\underline{g}$ , il faut préciser comment la structure a été mise progressivement en pesanteur. L'état de plastification à la

---

1. L'hypothèse  $\underline{0} \in \mathbb{S}$  est physiquement légitime. De plus elle assure automatiquement que l'inégalité de Clausius-Duhem associée au Deuxième Principe de la Thermodynamique est automatiquement vérifiée dès que l'inégalité de Hill l'est, cf le chapitre précédent.

fin de la mise sous poids propre peut dépendre du processus. On voit donc l'importance du procédé de fabrication.

On suppose connu le champ de déformation plastique  $\underline{x} \mapsto \underline{\varepsilon}_0^p(\underline{x})$  au début du processus de chargement. Cet état initial peut être soit  $\underline{0}$  si la structure n'a jamais été chargée, soit l'état de plastification de la structure à la fin d'un processus de chargement antérieur<sup>2</sup>. Cette deuxième vision est particulièrement utile lorsqu'on envisage des processus de chargement complexes ou non monotones.

**Les inconnues et les équations** Il s'agit donc dans ce problème d'évolution quasi-statique de trouver l'évolution des déplacements, des contraintes, des déformations et des déformations plastiques dans la structure, *i.e.* les fonctions  $(\underline{x}, t) \mapsto \underline{\xi}(\underline{x}, t)$ ,  $(\underline{x}, t) \mapsto \underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ ,  $(\underline{x}, t) \mapsto \underline{\varepsilon}(\underline{x}, t)$  et  $(\underline{x}, t) \mapsto \underline{\varepsilon}^p(\underline{x}, t)$  pour  $\underline{x} \in \bar{\Omega}$  et  $t \in [0, T)$ . Cette évolution est régie par

**La condition initiale :**

$$\underline{\varepsilon}^p(\underline{x}, 0) = \underline{\varepsilon}_0^p(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega \quad (6.1)$$

**L'équilibre à chaque instant :**

$$\operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) + \underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (6.2)$$

**La relation contrainte-déformation :**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{C}}(\underline{x}) : (\underline{\varepsilon}(\underline{x}, t) - \underline{\varepsilon}^p(\underline{x}, t)), \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (6.3)$$

**La relation déformation-déplacement :**

$$2\underline{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \nabla \underline{\xi}(\underline{x}, t) + \nabla \underline{\xi}(\underline{x}, t)^T, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (6.4)$$

**La loi standard de plasticité parfaite :**

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) \in \mathbb{S}(\underline{x}), \quad (\underline{\sigma}(\underline{x}, t) - \underline{\sigma}^*) : \underline{\varepsilon}^p(\underline{x}, t) \geq 0, \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (6.5)$$

**Les conditions aux limites :**

$$\begin{cases} \underline{\xi}(\underline{x}, t) = \underline{\xi}^d(\underline{x}, t), & \underline{x} \in \partial_D \Omega, \quad t \geq 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}, t), & \underline{x} \in \partial_N \Omega, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Ce système d'équations doit être complété par des conditions de continuité du vecteur contrainte et des déplacements aux interfaces entre les matériaux ou de façon plus générale sur toute surface  $\Sigma$  incluse dans  $\Omega$ . On en a en particulier besoin à la frontière entre la zone élastique et la zone plastique. Rappelons ces conditions de continuité pour mémoire

**Continuité des déplacements et du vecteur contrainte**

$$\llbracket \underline{\xi} \rrbracket(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \llbracket \underline{\sigma} \rrbracket(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Sigma, \quad t \geq 0$$

où le double crochet désigne le saut, *i.e.*

$$\llbracket f \rrbracket(\underline{x}) = f^+(\underline{x}) - f^-(\underline{x}), \quad f^\pm(\underline{x}) = \lim_{h \downarrow 0} f(\underline{x} \pm h \underline{n}(\underline{x})), \quad (6.7)$$

$\underline{n}(\underline{x})$  désignant la normale unitaire au point  $\underline{x}$  de la surface orientée  $\Sigma$ .

---

2. L'état final de chargement lors du processus de chargement antérieur doit évidemment coïncider avec l'état initial de chargement du nouveau processus.

**La compatibilité des conditions initiales** Comme les déformations plastiques sont données à l'instant initial, les champs de déplacement, de déformations et de contraintes à cet instant, soit  $\underline{\xi}_0$ ,  $\underline{\varepsilon}_0$  et  $\underline{\sigma}_0$ , sont obtenus en résolvant un problème d'élasticité linéaire avec précontraintes et pour chargement celui de l'instant initial. De façon précise, ces champs sont donnés par

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\sigma}_0 + \underline{f}_0 &= \underline{0}, \quad \underline{\sigma}_0 = \underline{\underline{C}}(\underline{\varepsilon}_0 - \underline{\varepsilon}_0^p), \quad 2\underline{\varepsilon}_0 = \nabla \underline{\xi}_0 + \nabla \underline{\xi}_0^T \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\xi}_0 &= \underline{\xi}_0^d \quad \text{sur } \partial_D \Omega, \quad \underline{\sigma}_0 \cdot \underline{n} = \underline{T}_0 \quad \text{sur } \partial_N \Omega \end{aligned}$$

où les données à l'instant initial figurent avec l'indice 0. On voit que  $-\underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}_0^p$  joue le rôle de précontraintes, *i.e.* les contraintes que voit le matériau dans son état non déformé. Sous réserve que les données en forces  $\underline{f}_0$ ,  $\underline{T}_0$ ,  $\partial_N \Omega$ , en déplacements  $\underline{\xi}_0^d$ ,  $\partial_D \Omega$  et en précontraintes  $\underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}_0^p$  soient compatibles avec l'équilibre, ce problème d'élasticité possède une solution unique pour les déformations et les contraintes, unique à des déplacements rigides près pour les déplacements. Supposons que cela soit le cas. Il reste à vérifier le critère de plasticité, *i.e.*

$$\underline{\sigma}_0(\underline{x}) \in \mathbb{S}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega.$$

Ceci n'est pas automatique et dépend de l'ensemble des données initiales. Il y a toutefois deux situations, très fréquentes en pratique, où cette condition de compatibilité des données initiales est automatiquement vérifiée : (i) celle où la structure n'est pas plastifiée et n'est soumise à aucun chargement à l'instant initial ; (ii) celle où l'état initial correspond à l'état final d'un processus de chargement antérieur. En effet, dans le premier cas, si  $\underline{f}_0$ ,  $\underline{T}_0$ ,  $\underline{\xi}_0^d$  et  $\underline{\varepsilon}_0^p$  sont nuls, alors  $\underline{\sigma}_0 = \underline{0}$  est l'unique solution en contraintes du problème d'élasticité initial et, comme on suppose que  $\underline{0} \in \mathbb{S}$ , la condition de compatibilité est satisfaite. Dans le deuxième cas, comme l'état initial résulte d'un processus de chargement antérieur et est donc solution, à l'instant final  $T$ , du problème d'évolution correspondant, les contraintes vérifient le critère de plasticité.

### 6.1.2 Un exemple 3D : la torsion élasto-plastique d'un arbre cylindrique

On se propose ici de résoudre le problème d'évolution dans le cas de la torsion d'un arbre cylindrique à section circulaire fait d'un matériau obéissant à la loi standard de Von Mises. C'est un des (rares) problèmes 3D où l'on sait calculer exactement la solution. Il a de plus le mérite de mettre en évidence une grande partie des propriétés attachées à la plasticité parfaite. Nous l'utiliserons donc comme problème de référence pour illustrer nos propos. Nous distinguerons le cas où le cylindre est plein de celui où il est creux, car des différences qualitatives apparaissent. Nous traiterons d'abord et de façon détaillée le cas du cylindre plein, avant d'indiquer ce qui change dans le cas d'un cylindre creux.

#### Cas d'un cylindre plein

**Formulation du problème** On choisit un système de coordonnées cylindriques, l'axe  $z$  correspondant à l'axe du cylindre, la base du cylindre étant dans le plan  $z = 0$ . La hauteur du cylindre est  $L$ , le rayon de sa section droite  $S$  est  $R$ . La base est fixée, alors que l'on fait subir au sommet une rotation d'ensemble autour de son axe d'angle  $\alpha$  croissant depuis 0. La surface latérale du cylindre est libre de forces et on néglige la pesanteur. Le cylindre est dans son état naturel, non plastifié, à l'instant initial. Résituons ce problème par rapport au problème général formulé dans la section précédente. On a

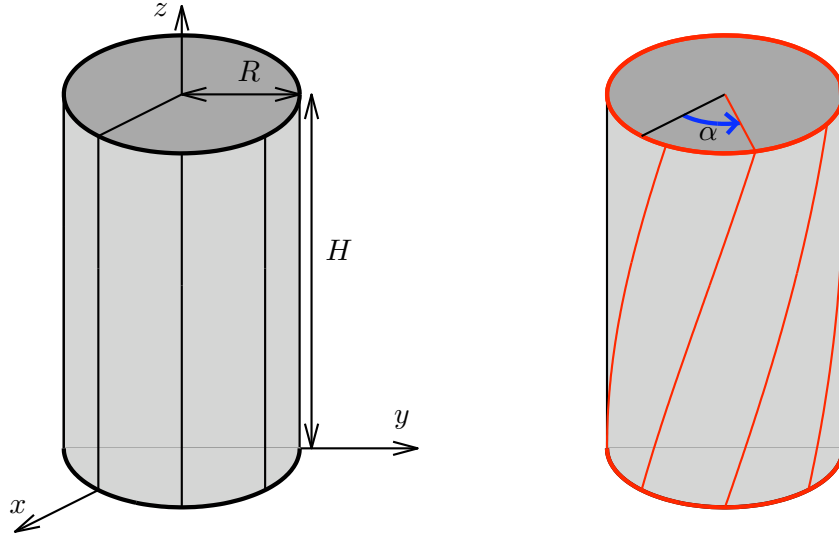


FIGURE 6.1 – Torsion d'un arbre cylindrique à section circulaire. À gauche : configuration de référence ; à droite : configuration déformée.

$$\Omega = S \times (0, L), \quad S = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}, \quad \partial_N \Omega = \partial S \times (0, L), \quad \partial_D \Omega = S_0 \cup S_L$$

et

$$\underline{f} = \underline{0}, \quad \underline{\varepsilon}_0^p = \underline{0}, \quad \underline{T} = \underline{0}, \quad \underline{\xi}^d = \begin{cases} \underline{0} & \text{sur } S_0 \\ \alpha r \underline{e}_\theta & \text{sur } S_L \end{cases}.$$

On peut prendre l'angle  $\alpha$  comme paramètre de chargement et poser  $\alpha = t$ . Le matériau étant isotrope et son comportement étant régi par le modèle de Von Mises, on a

$$\mathbb{S} = \{\underline{\sigma} \in \mathbb{M}_s^3 : \sigma_{eq} \leq \sigma_c\}, \quad \underline{\varepsilon}^p = \frac{3\dot{\eta}}{2\sigma_c} \underline{\underline{s}}, \quad \begin{cases} \dot{\eta} = 0 & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_c \\ \dot{\eta} \geq 0 & \text{si } \sigma_{eq} = \sigma_c \end{cases}$$

et

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{I}} + 2\mu(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p).$$

**Recherche d'une solution particulière** Nous allons chercher une solution à ce problème d'évolution en s'inspirant de la forme de la solution en élasticité. Alors que l'on sait que la solution est unique en élasticité, ne disposant pas (encore) d'un tel résultat en élasto-plasticité, il faut considérer à ce stade que ce ne sera qu'une solution particulière. On fait l'hypothèse que les sections droites subissent chacune une rotation autour de l'axe d'un angle proportionnel à leur cote. Autrement dit on suppose que le champ de déplacement est donné par

$$\underline{\underline{\xi}} = tr \frac{z}{L} \underline{e}_\theta \quad (6.8)$$

et donc que les déformations s'écrivent

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{tr}{2L} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta). \quad (6.9)$$



Supposons de plus que les contraintes ont également comme seules composantes non nulles  $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$  et que “par symétrie”<sup>3</sup> elles ne dépendent que de  $r$  et  $t$ , *i.e.*

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(r, t)(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta). \quad (6.10)$$

On déduit de la relation contrainte-déformation que les déformations plastiques s'écrivent

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \gamma^p(r, t)(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta). \quad (6.11)$$

Sous ces deux hypothèses, il s'agit donc de trouver  $\tau(r, t)$  et  $\gamma^p(r, t)$ . Si l'on reporte dans le problème d'évolution, on constate que les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont automatiquement satisfaites. Il ne reste qu'à écrire les relations de comportement et la condition initiale. Comme  $\underline{\underline{\sigma}}$  est un déviateur, on a  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}}$  et la contrainte équivalente vaut  $\sigma_{eq} = \tau\sqrt{3}$ . En reportant dans la loi de Von Mises, il vient

$$\tau = 2\mu \left( \frac{tr}{2L} - \gamma^p \right), \quad |\tau| \leq \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}, \quad \begin{cases} \dot{\gamma}^p = 0 & \text{si } |\tau| < \sigma_c/\sqrt{3} \\ \dot{\gamma}^p \geq 0 & \text{si } \tau = +\sigma_c/\sqrt{3} \\ \dot{\gamma}^p \leq 0 & \text{si } \tau = -\sigma_c/\sqrt{3} \end{cases} \quad (6.12)$$

avec la condition initiale  $\gamma^p(r, 0) = 0$ . Si l'on se place à  $r$  fixé et si l'on pose  $\varepsilon = tr/2L$ , on reconnaît dans (6.12) le système d'équations régissant l'évolution du patin-ressort. Le rôle de la raideur est joué par  $2\mu$  et celui de la force critique de glissement par  $\sigma_c/\sqrt{3}$ . De plus chaque point matériel est soumis à une déformation  $\varepsilon$  croissante qui lui est propre. Son évolution élasto-plastique n'est pas couplée avec celle des autres points. On peut utiliser les résultats du modèle patin-ressort et résumer ceci par

**Conclusion** : Le problème de torsion élasto-plastique de l'arbre à section circulaire se ramène à étudier une famille infinie d'assemblages indépendants, chacun de type patin-ressort et soumis à un déplacement croissant.

On peut donc calculer l'évolution point matériel par point matériel. Considérons un point en  $r \in (0, R)$ . Il reste élastique tant que  $\tau(r, t) < \sigma_c/\sqrt{3}$  et plastifie ensuite de façon à ce que  $\tau(r, t)$  reste égal à  $\sigma_c/\sqrt{3}$ . D'où l'évolution du cisaillement  $\tau$  et de la déformation plastique  $\gamma^p$

$$\begin{cases} \tau(r, t) = \frac{tr\mu}{L}, & \gamma^p(r, t) = 0, & \text{si } tr \leq \frac{\sigma_c L}{\mu\sqrt{3}} \\ \tau(r, t) = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}, & \gamma^p(r, t) = \frac{tr}{2L} - \frac{\sigma_c}{2\mu\sqrt{3}}, & \text{si } tr > \frac{\sigma_c L}{\mu\sqrt{3}} \end{cases}. \quad (6.13)$$

Interprétons ces résultats dans un diagramme “espace-temps”  $(r, \alpha)$  en raisonnant à  $r$  fixé en fonction de  $\alpha$ , puis à  $\alpha$  fixé en fonction de  $r$ , cf Figure 6.2. On voit que le centre de l'arbre  $r = 0$  ne plastifiera

---

3. Il faut faire très prudent dans l'utilisation des arguments de symétrie : ce n'est pas parce que le problème est symétrique que les solutions le sont obligatoirement. C'est toutefois en général vrai quand il y a unicité de la solution. Ici, n'ayant pas démontré de résultat d'unicité, il faut considérer à ce stade que l'on cherche simplement une solution symétrique.

jamais puisque les contraintes  $y$  sont toujours nulles. Tout autre point  $r$  commence à plastifier pour une valeur de l'angle de torsion qui dépend du point et est donnée par

$$\alpha_e(r) = \frac{\sigma_c L}{\mu \sqrt{3} r}.$$

Comme  $\alpha_e(r)$  décroît avec  $r$ , c'est sur la surface latérale qu'apparaîtra la première plastification. Ce sera pour l'angle de torsion

$$\alpha_e = \inf_{r \in (0, R)} \alpha_e(r) = \frac{\sigma_c L}{\mu \sqrt{3} R}.$$

Donc quand  $\alpha \in [0, \alpha_e]$ , tout l'arbre est élastique et sans déformation plastique. Pour une torsion  $\alpha > \alpha_e$ , la couronne cylindrique  $r \in (R_e(\alpha), R)$  est plastifiée, avec

$$R_e(\alpha) = \frac{\sigma_c L}{\mu \sqrt{3} \alpha}.$$

La surface  $r = R_e(\alpha)$  correspond donc au front de la zone plastique. Elle pénètre progressivement vers l'intérieur de l'arbre au fur et à mesure que l'angle de torsion augmente. Toutefois, elle ne pourra jamais atteindre le centre qui reste toujours élastique. Analysons maintenant cette solution en termes

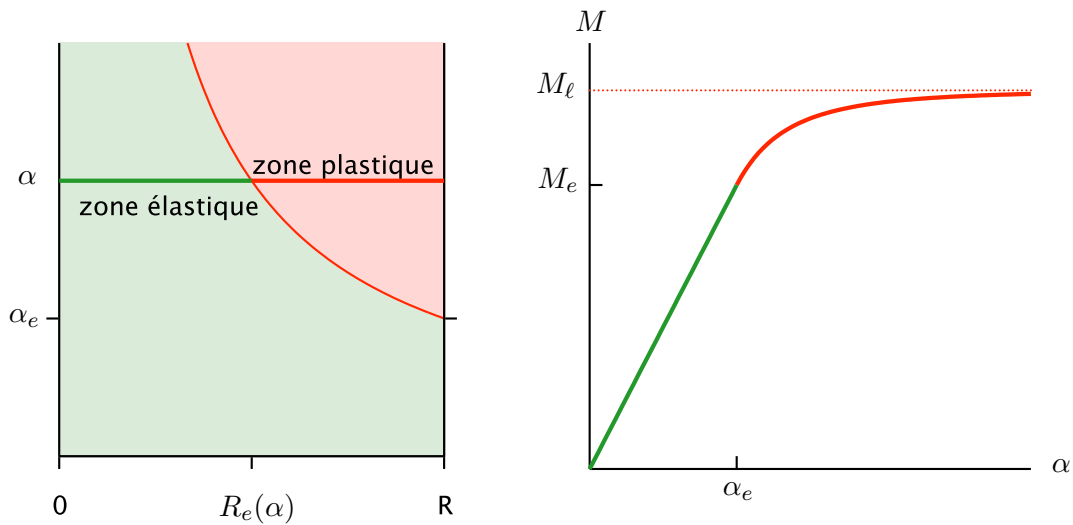


FIGURE 6.2 – Réponse de l'arbre plein sous une torsion croissante. À gauche : pénétration progressive de la zone plastique vers l'axe du cylindre ; à droite : réponse globale moment de torsion-angle de torsion (en vert la phase élastique, en rouge la phase élastoplastique)

de la réponse globale de l'arbre. La variable duale de l'angle de torsion  $\alpha$  est le couple de torsion  $M$ , cf Exercice 3.4 (page 46)

$$M := \int_S r \sigma_{z\theta} dS = 2\pi \int_0^R \tau(r, \alpha) r^2 dr.$$

Pendant la phase élastique  $0 \leq \alpha \leq \alpha_e$ , on retrouve l'expression classique de l'élasticité  $M = \mu J \alpha / L$  où  $J = \pi R^4 / 2$  est le moment d'inertie géométrique de la section par rapport à son axe, cf Exercice 3.5

(page 48). Durant la phase élasto-plastique, l'intégrale se calcule en distinguant la zone élastique  $0 \leq r < R_e(\alpha)$  de la zone plastique  $R_e(\alpha) < r < R$ ,

$$M = 2\pi \int_0^{R_e(\alpha)} r^2 \tau(r, \alpha) dr + 2\pi \int_{R_e(\alpha)}^R r^2 \tau(r, \alpha) dr. \quad (6.14)$$

En utilisant (6.13) et en notant  $M_e$  le couple de torsion à la fin de la phase élastique, *i.e.*  $M_e = \mu J \alpha_e / L$ , on obtient finalement

$$M = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha_e} M_e & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \alpha_e \\ \left( \frac{4}{3} - \frac{\alpha_e^3}{3\alpha^3} \right) M_e & \text{si } \alpha > \alpha_e \end{cases}. \quad (6.15)$$

Le graphe de  $\alpha \mapsto M$  est représenté sur la Figure 6.2. On peut noter plusieurs propriétés remarquables dont certaines ont un caractère générique.

1. Le couple de torsion continue à croître après la phase élastique alors que le matériau plastifie et que le cisaillement  $\tau$  ne peut pas dépasser  $\tau/\sqrt{3}$ . Ce phénomène est appelé *écrouissage structurel* par analogie mais aussi opposition à l'*écrouissage matériel*. Cet écrouissage structurel est dû ici à la présence d'une zone élastique dans laquelle les contraintes peuvent croître.
2. La relation  $\alpha \mapsto M(\alpha)$  donnée par (6.15) est non seulement continue, mais aussi continûment différentiable en  $\alpha = \alpha_e$ . Ceci est dû au fait que la plasticité apparaît sur la surface latérale et donc sur un ensemble de mesure nulle, puis pénètre progressivement vers l'intérieur. On peut aussi le voir analytiquement à partir de l'expression (6.14). On a un résultat différent dans le problème de traction simple d'une barre où l'ensemble de la barre atteint simultanément le seuil de plastification. Dans ce cas la réponse force-déplacement présente une rupture de pente.
3. Le couple de torsion tend asymptotiquement vers une limite  $M_\ell = 4M_e/3$  qu'il ne peut dépasser. C'est le phénomène de *charge limite* inhérent au fait que les contraintes sont bornées. La structure ne peut pas supporter n'importe quelle charge. Autrement dit, si l'on imposait le couple de torsion plutôt que l'angle de torsion, on ne pourrait plus trouver une réponse compatible avec l'hypothèse d'équilibre dès que le couple dépasserait la valeur  $M_\ell$ . Il y aurait *ruine dynamique* de l'arbre.
4. Le couple de torsion n'atteint jamais la valeur limite  $M_\ell$ . Cela tient à la présence d'un noyau élastique quelle que soit la valeur de l'angle de torsion imposée.

### Cas d'un cylindre creux

Examinons plus rapidement le cas d'un cylindre creux où la section droite est une couronne circulaire de rayon extérieur  $R$  et d'épaisseur  $e < R$ , *i.e.*  $S = \{(x, y) : (R - e)^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ . Soumis au même chargement de torsion, le problème d'évolution se formule de la même façon que pour le cylindre plein avec en plus la condition à la limite  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$  sur la surface intérieure  $r = R - e$ .

Cherchons une solution particulière sous les mêmes hypothèses *a priori* sur la forme des déplacements et des contraintes. On arrive ainsi à la même forme des champs,  $\tau$  et  $\gamma^p$  sont toujours données par (6.13) à la seule différence que  $r$  est maintenant restreint à l'intervalle  $(R - e, R)$ . Par conséquent, la plasticité apparaît toujours en  $r = R$  pour la même valeur  $\alpha_e$  de l'angle de torsion, puis progresse vers l'intérieur, la position du front étant toujours donnée par  $r = R_e(\alpha)$ . Mais, à la différence du cylindre plein, la zone plastique occupera tout le cylindre pour une valeur finie de l'angle de torsion  $\alpha_\ell$  telle que  $R_e(\alpha_\ell) = R - e$ , *i.e.*

$$\alpha_\ell = \frac{R}{R - e} \alpha_e = \frac{\sigma_c L}{\mu \sqrt{3} (R - e)},$$

cf Figure 6.3. Au delà de  $\alpha_\ell$ , tout le cylindre plastifie, le cisaillement  $\tau$  reste partout bloqué à la valeur critique  $\sigma_c/\sqrt{3}$ . En terme du couple de torsion, il faut maintenant distinguer les trois phases et le calcul donne

$$M = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha_e} M'_e & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \alpha_e \\ \frac{4R^4 \alpha_e \alpha^3 - R^4 \alpha_e^4 - 3(R - e)^4 \alpha^4}{3(R^4 - (R - e)^4) \alpha^3} M'_e & \text{si } \alpha_e < \alpha < \alpha_\ell \\ \frac{4}{3} \frac{R^4 - R(R - e)^3}{R^4 - (R - e)^4} M'_e & \text{si } \alpha \geq \alpha_\ell \end{cases} \quad (6.16)$$

où  $M'_e = \mu J' \alpha_e / L$  et  $J' = \pi(R^4 - (R - e)^4)/2$  est le moment d'inertie du cylindre creux (moindre que celui du cylindre plein). On voit donc que dès que l'arbre est entièrement plastifié, le couple de torsion n'évolue plus et reste à sa valeur limite  $M'_\ell$  que l'on peut comparer à  $M'_e$  et à  $M_\ell$ ,

$$M'_\ell = \frac{4}{3} \frac{R^4 - R(R - e)^3}{R^4 - (R - e)^4} M'_e = \left(1 - \left(1 - \frac{e}{R}\right)^3\right) M_\ell.$$

Notons les similitudes et les différences par rapport au cas du cylindre plein.

1. Il y a toujours une phase d'écrouissage structurel tant qu'il reste un noyau élastique. Le couple de torsion *atteint* sa valeur limite  $M'_\ell$  dès qu'il n'y a plus de noyau élastique.
2. La relation  $\alpha \mapsto M$  est toujours continûment différentiable, non seulement en  $\alpha_e$  mais aussi en  $\alpha_\ell$ . Cela tient toujours à l'apparition et à l'évolution progressive de la zone plastique en  $\alpha_e$ , et donc à la disparition progressive de la zone élastique en  $\alpha_\ell$ .
3. Si l'on regarde l'influence de l'épaisseur, on voit que non seulement  $M'_e$  et  $M'_\ell$  décroissent (vers 0) quand  $e$  décroît (vers 0), mais aussi que le rapport  $M'_\ell/M'_e$  décroît (vers 1), ce qui veut dire que l'effet d'écrouissage structurel est d'autant plus faible que l'épaisseur est petite. À la limite, le cylindre creux "infiniment mince" a un comportement en torsion du type élasto-plastique parfait. Cette propriété est utilisée pour identifier le critère de plasticité dans des essais de traction-torsion de tubes minces, cf le chapitre précédent.

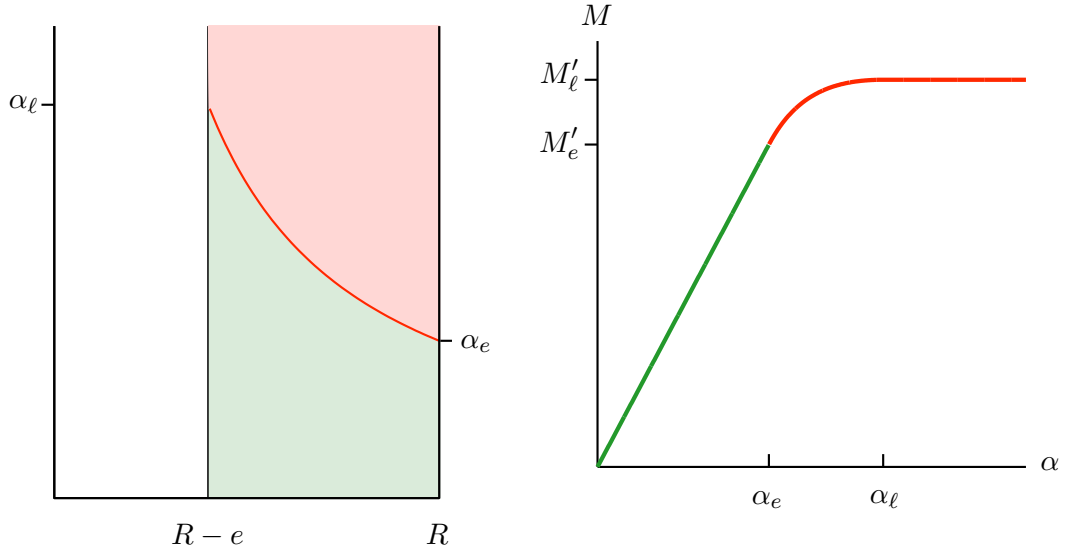


FIGURE 6.3 – Réponse de l'arbre creux sous une torsion croissante. À gauche : pénétration progressive à partir de  $\alpha_e$  de la zone plastique vers la surface intérieure qu'elle atteint en  $\alpha_l$  ; à droite : réponse globale moment de torsion-angle de torsion, le couple limite  $M'_l$  est atteint en  $\alpha_l$ .

### 6.1.3 Quelques propriétés qualitatives

Commençons par établir un des résultats fondamentaux de la théorie de la plasticité parfaite

**Unicité des contraintes.** *Il existe au plus un champ de contraintes solution du problème d'évolution d'une structure faite de matériaux élastiques parfaitement plastiques standards.*

Il ne s'agit que d'un résultat d'unicité car, du fait de la notion de *charge limite*, il peut ne pas exister de solution. Le caractère standard joue un rôle essentiel dans la démonstration.

PREUVE. Envisageons deux solutions  $(\xi, \underline{\varepsilon}^p, \underline{\sigma})$  et  $(\xi^*, \underline{\varepsilon}^{p*}, \underline{\sigma}^*)$  du problème d'évolution présenté dans la Section 6.1.1. Il s'agit de montrer que  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^*$ . Soustrayons les équations d'équilibre (6.2) satisfaites par  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\sigma}^*$ , il vient  $\text{div}(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) = \underline{0}$ . Soient  $\dot{\underline{\xi}}$  et  $\dot{\underline{\xi}}^*$  les champs de vitesses solutions. Multiplions l'équation précédente par  $\dot{\underline{\xi}} - \dot{\underline{\xi}}^*$  et intégrons par parties pour obtenir

$$0 = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : (\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\dot{\underline{\xi}} - \dot{\underline{\xi}}^*) \cdot (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \cdot \underline{n} dS. \quad (6.17)$$

Grâce aux conditions aux limites (6.6), on a  $(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \cdot \underline{n} = \underline{0}$  sur  $\partial_N\Omega$  et  $\dot{\underline{\xi}} - \dot{\underline{\xi}}^* = \underline{0}$  sur  $\partial_D\Omega$ . Par conséquent les termes de bord s'annulent dans (6.17). Utilisons la relation d'élasticité (6.3) pour écrire

$$\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^* = \underline{\underline{S}} : (\dot{\underline{\sigma}} - \dot{\underline{\sigma}}^*) + \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \dot{\underline{\varepsilon}}^{p*}.$$

En l'injectant dans (6.17), on obtient

$$0 = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : \underline{\underline{S}} : (\dot{\underline{\sigma}} - \dot{\underline{\sigma}}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) : (\dot{\underline{\varepsilon}}^p - \dot{\underline{\varepsilon}}^{p*}) d\Omega. \quad (6.18)$$

Grâce à l'inégalité de Hill (6.5), on a à la fois (en intervertissant les rôles des deux solutions)

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p d\Omega \geq 0, \quad \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p*} d\Omega \geq 0.$$

En additionnant ces deux inégalités et en reportant dans (6.18), on obtient

$$0 \geq \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) d\Omega.$$

On reconnaît dans le second membre une dérivée par rapport au temps, *i.e.*

$$0 \geq \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) d\Omega \right)$$

qui doit être vraie à chaque instant. En intégrant en temps entre 0 et  $t$  et en tenant compte de la condition initiale (6.1), on obtient à l'instant  $t$

$$0 \geq \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) d\Omega.$$

Mais comme le tenseur de souplesse est positif, ce n'est possible que si  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^*$  à l'instant  $t$ . Comme  $t$  est arbitraire, on a le résultat d'unicité recherché.  $\square$

## Sur l'unicité des déplacements

Le résultat précédent ne dit rien quant à l'unicité des déplacements et des déformations plastiques. On pourrait penser que cela tient à la démonstration utilisée et qu'on pourrait récupérer un résultat général d'unicité (ou de non unicité) pour l'évolution. Il n'en est rien comme on va le voir pour le problème de torsion.

**Résultats d'unicité de l'évolution pour le problème de torsion.** *Il y a unicité de l'évolution pour le problème de torsion dans le cas du cylindre plein, mais pas dans le cas du cylindre creux. Plus précisément, dans le second cas, l'évolution des contraintes est unique mais il existe une infinité d'évolutions possibles des déplacements et des déformations plastiques une fois que le seuil de plasticité est atteint dans tout le cylindre, i.e. quand  $\alpha > \alpha_\ell$ .*

PREUVE. La démonstration s'appuie sur le fait qu'il y a *unicité des contraintes* en vertu de la Propriété précédente. Dans les deux cas, on sait donc que  $\underline{\underline{\sigma}}$  est de la forme (6.10) avec  $\tau(r, t)$  donné par (6.13). Seules les composantes  $r\theta$  et  $\theta r$  de  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont non nulles. Par conséquent, d'après la loi d'écoulement de Von Mises, il en est de même pour  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  et par intégration en temps pour  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ , *i.e.*

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(\underline{x}, t) = \gamma^p(\underline{x}, t)(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta),$$

en remarquant que  $\gamma^p$  dépend *a priori* de  $(\underline{x}, t)$ . On tire de la relation contrainte-déformation que seules les composantes  $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z}$  peuvent ne pas être nulles. En utilisant les conditions aux limites en

$z = 0$  et  $z = L$ , on en déduit alors que les déplacements ont nécessairement la forme suivante<sup>4</sup> :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \omega(z, t) r \underline{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \omega(0, t) = 0, \quad \omega(L, t) = t$$

et donc que

$$\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \frac{r}{2} \frac{\partial \omega}{\partial z}(z, t).$$

Comme le seuil de plasticité n'est pas atteint dans la région de l'espace-temps où  $rt < R\alpha_e$  et que le cylindre est non plastifié à l'instant initial, la déformation plastique est nulle dans cette région en vertu de la loi d'écoulement. Dans cette région, on a donc  $\gamma^p = 0$  et les déformations sont données par (6.9),  $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z} = rt/2L$ . Distinguons le cas du cylindre plein de celui du cylindre creux.

1. *Cas du cylindre plein.* Comme quel que soit  $t$  il existe un noyau élastique (le cylindre  $0 \leq r < \min\{R, R\alpha_e/t\}$ ,  $0 < z < L$ ) où  $\gamma^p = 0$ , on obtient, en comparant les deux expressions précédentes des déformations,  $\omega(z, t) = tz/L$  pour tout  $z$ . On retrouve ainsi le champ des déplacements (6.8) qui constituait notre hypothèse pour construire la solution particulière. Autrement dit, nous venons de montrer que c'était le seul possible. D'où l'unicité des déplacements et on déduit de la relation contrainte-déformation l'unicité des déformations plastiques.
2. *Cas du cylindre creux.* On peut utiliser le raisonnement précédent et conclure à l'unicité tant qu'il existe un noyau élastique, *i.e.* tant que  $t < \alpha_\ell$ . Par continuité en temps, c'est encore vrai en  $t = \alpha_\ell$ . Mais au delà on sait que  $\tau = \sigma_c/\sqrt{3}$  dans tout le cylindre et donc que

$$\gamma^p(\underline{x}, t) = \frac{r}{2} \frac{\partial \omega}{\partial z}(z, t) - \frac{\sigma_c}{2\mu\sqrt{3}}.$$

Il reste à s'assurer que la condition d'irréversibilité  $\dot{\gamma}^p \geq 0$ , les conditions aux limites  $\omega(0, t) = 0$ ,  $\omega(L, t) = t$  et la condition de continuité  $\omega(z, \alpha_\ell) = \alpha_\ell z/L$  sont satisfaites. Ceci laisse une infinité de possibilités pour  $\omega(z, t)$  quand  $t > \alpha_\ell$ .

□

On pourrait multiplier les exemples où il n'y a pas unicité de la réponse. Celui de la traction simple d'un cylindre est probablement le plus simple et est proposé comme exercice. On notera à l'occasion la différence essentielle entre le problème d'évolution pour une structure et celui pour l'élément de volume. Pour ce dernier, on a vu au chapitre précédent que la réponse de l'élément de volume dans un essai uni-axial était unique dans le cas du modèle standard de Von Mises. Ce n'est plus vrai pour une structure (cylindrique). La raison est qu'on contrôle la déformation axiale pour l'élément de volume alors que l'on ne contrôle que les déplacements axiaux des sections extrêmes pour le cylindre. Cette absence de contrôle local de la cinématique laisse partiellement libre l'écoulement plastique axial en l'absence d'écroutissage.

**Exercice 6.1. Traction simple d'un cylindre.** *Considérer le cas où le cylindre (plein ou creux) élastique parfaitement plastique avec critère de Von Mises est soumis aux conditions aux limites suivantes :  $\xi_z = 0, \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0$  en  $z = 0$  et  $\xi_z = tL, \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0$  en  $z = L$ , la surface latérale restant libre de forces. Déterminer l'évolution des contraintes et montrer qu'il y a une infinité de déplacements et de déformations plastiques possibles quand  $t > \sigma_c/E$ .*

---

4. Cette vérification est laissée à titre d'exercice.

Cette non unicité des déplacements traduit le phénomène physique d'écoulement plastique non contrôlable de la structure. Les deux exemples de la traction et de la torsion peuvent laisser à penser que ceci n'a lieu que quand la structure est complètement plastifiée. Il n'en est rien comme le montrent les exemples traités dans la section dédiée aux calculs des charges limites.

### Les charges limites élastiques

Du fait que le ou les matériaux constitutifs ont un comportement à seuil défini par la notion de domaine d'élasticité, on peut définir pour la structure la notion de domaine d'élasticité pour le chargement et par conséquent celle de *charge limite élastique*. Dans le cas du problème de torsion, le domaine d'élasticité pour le couple de torsion est l'intervalle  $[-M_e, +M_e]$  (alors que son "image" pour l'angle de torsion est l'intervalle  $[-\alpha_e, +\alpha_e]$ ). Les couples  $\pm M_e$  correspondent aux charges limites élastiques. Cela se généralise pour des structures soumises à un nombre fini de paramètres de chargement.

On se place dans la situation présentée en Chapitre 1 où l'ensemble des déplacements admissibles  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel et où le travail des efforts extérieurs donnés se décompose en <sup>5</sup>

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi}^*).$$

On suppose que ce chargement est compatible avec l'équilibre, *i.e.* que  $q_i(\underline{\xi}^*) = 0, \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{R}, 1 \leq i \leq n$ ,  $\mathcal{R}$  désignant l'ensemble des déplacements rigides admissibles (cf Chapitre 1). La structure est soumise à un chargement caractérisé par son chemin  $t \mapsto \underline{Q}(t)$  dans l'espace des forces généralisées partant de  $\underline{0}$  à l'instant 0, *i.e.*  $\underline{Q}(0) = 0$ . Si l'on suppose que les déformations plastiques initiales sont nulles, tant qu'elles le restent l'état d'équilibre élastique est obtenu en résolvant le problème variationnel d'élastostatique

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}) : \underline{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega = \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.$$

Le champ des contraintes solution est unique et le champ des déplacements unique à un déplacement rigide près. Par linéarité, la solution peut donc s'écrire

$$\underline{\xi} = \sum_{i=1}^n Q_i \underline{\xi}^i, \quad \underline{\sigma} = \sum_{i=1}^n Q_i \underline{\sigma}^i$$

où  $\underline{\sigma}^i = \underline{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^i)$  et  $\underline{\xi}^i$  est (une) solution du  $i$ -ème problème "élémentaire"

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^i) : \underline{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega = q_i(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.$$

Pour que cette solution élastique soit admissible pour le problème d'évolution élasto-plastique il faut et il suffit que les contraintes satisfassent partout le critère de plasticité, *i.e.*  $\sum_{i=1}^n Q_i \underline{\sigma}^i(\underline{x}) \in \mathbb{S}(\underline{x})$

---

5. On se ramène à ce cas pour le problème de torsion si l'on impose le couple de torsion  $M$  et non pas l'angle de torsion  $\alpha$ . On est alors évidemment dans le cas où  $n = 1$  et où  $Q_1 = M$  et  $q_1 = \alpha$ .



partout dans  $\Omega$ . Ceci définit un domaine  $\mathbb{Q}_e$  dans l'espace des forces généralisées appelé ensemble des charges élastiquement supportables :

$$\mathbb{Q}_e = \left\{ \underline{Q} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n Q_i \underline{\sigma}^i(\underline{x}) \in \mathbb{S}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega \right\}.$$

Cet ensemble  $\mathbb{Q}_e$ , qui concerne l'ensemble de la structure, possède les mêmes propriétés géométriques que son homologue local  $\mathbb{S}$  (ou ses homologues dans le cas de multi-matériaux). Précisément, on a

**Propriétés géométriques de  $\mathbb{Q}_e$ .** Si  $\mathbb{S}(x)$  est convexe pour tout  $\underline{x}$ , alors  $\mathbb{Q}_e$  est convexe ; si  $\mathbb{S}(x)$  est centré en  $\underline{0}$  pour tout  $\underline{x}$ , alors  $\mathbb{Q}_e$  est centré en  $\underline{0}$ .

La démonstration est laissée à titre d'exercice. On peut facilement le vérifier pour le problème de torsion. De façon générale, si la structure est soumise à un chargement à un seul paramètre, alors la convexité et la symétrie du domaine de réversibilité implique que  $\mathbb{Q}_e$  est un intervalle (fermé) du type  $[-Q_e, +Q_e]$ , avec éventuellement  $Q_e = +\infty$ .

**Exercice 6.2.** Imaginer une situation où une structure constituée d'un matériau obéissant au critère de Von Mises peut supporter n'importe quelle charge sans plastifier.

Il est malheureusement plus fréquent que les structures plastifient dès la moindre mise en charge. C'est le cas si la réponse élastique présente des singularités. Ces singularités sont induites par des fissures, des entailles, des bords avec des changements de conditions aux limites, etc. Les contraintes tendant vers l'infini lorsqu'on se rapproche des points singuliers, le critère de plasticité est violé dès que le chargement est non nul. Par conséquent  $\mathbb{Q}_e = \{0\}$ . Ceci montre que le concept de charges élastiquement supportables n'est pas très intéressant d'un point de vue pratique. En effet, il suffit de perturber un peu la structure (en rajoutant par exemple une petite fissure ou une petite entaille) pour faire chuter à 0 les charges élastiquement supportables. Cette forte sensibilité aux imperfections le rend difficilement utilisable par l'ingénieur comme outil de dimensionnement<sup>6</sup>. Il n'y a que dans des théories simplifiées de structures (structures élancées de type poutres par exemple) dans lesquelles tous les effets locaux tridimensionnels sont gommés et où on obtient des réponses élastiques non singulières que ce concept redevient intéressant.

## L'écroutissement structurel

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas d'un chargement défini par un seul paramètre, la force généralisée  $Q$  croissant depuis 0. Soit  $q$  le déplacement généralisé associé au déplacement  $\xi$  solution du problème d'évolution, *i.e.*  $q = W_{\text{ext}}^1(\xi)$ . Tant que  $Q$  reste inférieure à la charge limite élastique  $Q_e$  la structure ne plastifie pas. En général, on peut augmenter la charge au delà de  $Q_e$  mais au prix d'une plastification de toute ou partie de la structure<sup>7</sup>. C'est le cas dans l'exemple de la torsion où l'on

6. De ce point de vue, le problème de torsion est un mauvais exemple. En effet comme le rapport charge limite  $M_e$  sur charge de première plastification  $M_e$  est au plus égal à 4/3 (cas du cylindre plein), on est tenté de dire qu'il suffit d'un simple calcul élastique pour accéder à  $M_e$  et obtenir ainsi des règles de dimensionnement sans qu'il soit besoin de résoudre le problème d'évolution élasto-plastique.

7. Noter qu'il existe des cas où la structure ne peut pas supporter des charges plus grandes que  $Q_e$ . L'exemple le plus simple est celui de la traction simple d'un cylindre, cf Exercice 6.1.

peut faire croître le couple de torsion entre  $M_e$  et  $M_\ell$  durant la phase de plastification. Ce phénomène général est appelé *écrouissage structurel* ou *durcissement*.

On peut cependant se demander s'il n'est pas possible d'observer un "écrouissage négatif", phénomène que l'on appelle *adoucissement*. Si c'est le cas, pour l'observer et le décrire il faut changer le type de contrôle et contrôler non plus la force généralisée  $Q$  mais le déplacement généralisé  $q$ . (Cela consiste dans le problème de torsion à contrôler l'angle de torsion  $\alpha$  et de façon générale c'est le cas appelé *chargement à déplacement généralisé contrôlé* au Chapitre 1.) Un adoucissement sous  $q$  contrôlé croissant correspondrait à une réponse  $Q$  décroissante. Montrons que c'est impossible car on a nécessairement  $\dot{Q}\dot{q} \geq 0$ .

Pour cela, plaçons-nous à un instant  $t$  où le déplacement contrôlé vaut  $q$ , l'ensemble  $\mathcal{C}$  des champs cinématiquement admissibles s'écrivant  $\underline{\underline{C}} = q\underline{\underline{\xi}}^1 + \underline{\underline{C}}_0$ . Soit  $\underline{\underline{\sigma}}$  le champ de contraintes solution à cet instant. La force généralisée à cet instant est donnée par  $Q = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{\xi}}^1) d\Omega$ . Dérivons cette relation par rapport au temps, il vient  $\dot{Q} = \int_{\Omega} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{\xi}}^1) d\Omega$ . En vertu du Principe des Travaux Virtuels, on a  $\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{\xi}}^*) d\Omega = 0$ ,  $\forall \underline{\underline{\xi}}^* \in \underline{\underline{C}}_0$  et en dérivant par rapport au temps  $\int_{\Omega} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{\xi}}^*) d\Omega = 0$ ,  $\forall \underline{\underline{\xi}}^* \in \underline{\underline{C}}_0$ . Comme  $\underline{\underline{\xi}} - \dot{q}\underline{\underline{\xi}}^1 \in \underline{\underline{C}}_0$ , on obtient en combinant les relations précédentes et en utilisant la décomposition  $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^e + \underline{\underline{\xi}}^p$  :

$$\dot{Q}\dot{q} = \int_{\Omega} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{\xi}}) d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} : (\underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\xi}}^p) d\Omega. \quad (6.19)$$

Mais en vertu de l'inégalité de Hill, on a  $(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\xi}}^p \geq 0$ ,  $\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}$ . Prenons pour  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  le champ de contraintes solution à l'instant  $t - h$  (ce qui est licite puisqu'il est dans  $\mathbb{S}$ ), divisons l'inégalité de Hill par  $h$  et passons à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , on obtient  $\dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\xi}}^p \geq 0$ . Mais comme le tenseur de souplesse est positif, les termes du dernier membre de droite de (6.19) sont non négatifs et on obtient  $\dot{Q}\dot{q} \geq 0$ .

## Les charges limites

**La problématique.** On a vu dans le problème de torsion que le couple de torsion ne pouvait dépasser une valeur limite  $M_\ell$ . On peut se poser à ce sujet deux questions :

1. Cette valeur limite  $M_\ell$  tient-elle au processus de chargement monotone envisagé et à la condition initiale de non plastification du cylindre ? Autrement dit, pourrait-on en envisageant d'autres déformations plastiques initiales et des chargements non monotones diminuer ou augmenter ce couple limite ?
2. Cette notion de charge limite est-elle spécifique à cet essai ?

Nous montrerons que la réponse à ces deux questions est **non** en dégageant les idées suivantes :

1. Le couple de torsion limite  $M_\ell$  ne dépend que de la géométrie de la structure, du matériau constitutif et du fait que ce soit un essai de torsion, mais ni de l'état de plastification initial, ni du trajet de chargement  $t \mapsto \alpha(t)$ .
2. Le fait qu'une structure ne peut pas supporter n'importe quelles charges est une conséquence du fait que le matériau ne peut pas supporter n'importe quelles contraintes. Ce concept de charge limite est inhérent à l'hypothèse de plasticité *parfaite*. On le retrouve dans la majorité

des structures et la majorité des types de chargements<sup>8</sup>.

Cette existence de charges limites est fondamentale pour le dimensionnement des structures puisque cela oblige à inclure dans le cahier des charges la vérification que la structure étudiée est capable de supporter les charges prévues dans son fonctionnement. Se pose alors une nouvelle question essentielle d'un point de vue pratique

*Calcul des charges limites : Existe-t-il des méthodes pour calculer “directement” ces charges limites sans passer par la résolution d'un problème d'évolution élasto-plastique ?*

Nous montrerons que la réponse est **oui** et l'objectif principal de cette section est de décrire une méthode de calcul en l'illustrant sur quelques exemples. Cette méthode de calcul consiste en deux approches, l'une appelée *approche par l'intérieur* et l'autre appelée *approche par l'extérieur*, et en un résultat théorique montrant l'équivalence des deux approches. Nous décrivons et illustrons ci-dessous les deux approches, le résultat théorique sera donné sans démonstration.

## 6.2 Calcul des charges limites

### 6.2.1 Charges supportables

On se place dans le cas où le chargement est défini par un nombre fini de paramètres  $\underline{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$  de type forces généralisées. Par conséquent l'ensemble  $\mathcal{C}$  des déplacements cinématiquement admissibles est un espace vectoriel et le travail des efforts extérieurs donnés  $W_{\text{ext}}$  est la combinaison linéaire de  $n$  formes linéaires sur  $\mathcal{C}$  :

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi}), \quad \underline{\xi} \in \mathcal{C}.$$

Commençons par définir la notion de *charge potentiellement supportable* par la structure.

**Définition des charges potentiellement supportables.** Une charge  $\underline{Q} \in \mathbb{R}^n$  est dite *potentiellement supportable* par la structure, s'il existe un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  à la fois statiquement admissible avec cette charge et plastiquement admissible, i.e. telle que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi}), \quad \forall \underline{\xi} \in \mathcal{C}, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbb{S}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

L'ensemble de telles charges est notée  $\mathbb{Q}_p$ . Sa frontière  $\partial\mathbb{Q}_p$  constitue l'ensemble des charges limites.

On voit que l'état de déformation plastique et le processus de chargement n'interviennent pas dans cette définition. On s'intéresse simplement aux charges qui peuvent être équilibrées sans violer le critère de plasticité. Il est légitime de se demander si toute charge *potentiellement* supportable est *effectivement* supportable et ce quel que soit le trajet de chargement  $t \mapsto \underline{Q}(t)$  ne quittant pas  $\mathbb{Q}_p$ . En d'autres termes, on peut se demander si tout problème d'évolution associé à un trajet de chargement restant dans  $\mathbb{Q}_p$  et un état de déformation plastique initial  $\underline{\underline{\varepsilon}}_0^p$  admet toujours une solution. La réponse

---

8. Il peut toutefois y avoir des exceptions, cf Exercice 6.2. Par exemple, pour des structures dont le matériau constitutif obéit au critère de Von Mises ou de Tresca, comme ces critères ne bornent pas la partie sphérique des contraintes, tout chargement qui est compatible avec des contraintes purement sphériques n'est pas limité.

est **oui** pour toute loi standard d'élasto-plasticité parfaite (aux questions de régularité près). Nous admettrons ce résultat sans démonstration. Ce résultat admis, nous ne distinguerons plus les charges potentiellement supportables des charges effectivement supportables et parlerons simplement de *charge supportable*.

L'ensemble  $\mathbb{Q}_p$  des charges supportables est à comparer à l'ensemble  $\mathbb{Q}_e$  des charges élastiquement supportables. Il est évident, d'après leur définition, que  $\mathbb{Q}_e \subset \mathbb{Q}_p$ , puisque le champ de contraintes solution du problème d'élasticité est alors à la fois statiquement et plastiquement admissible. Il peut arriver qu'ils coïncident. L'exemple le plus simple est celui de la traction simple d'un cylindre 3D (ou d'une barre 1D). Mais en général ils diffèrent. D'autre part, comme  $\mathbb{Q}_e$ ,  $\mathbb{Q}_p$  hérite des propriétés géométriques de  $\mathbb{S}$ .

**Propriétés géométriques de  $\mathbb{Q}_p$ .** Si  $\mathbb{S}(x)$  est convexe pour tout  $\underline{x}$ , alors  $\mathbb{Q}_p$  est convexe ; si  $\mathbb{S}(x)$  est centré en  $\underline{0}$  pour tout  $\underline{x}$ , alors  $\mathbb{Q}_p$  est centré en  $\underline{0}$ .

La démonstration est laissée à titre d'exercice. Mais ces propriétés de convexité et de symétries se révèlent très utiles en pratique, notamment dans les approches par l'intérieur et par l'extérieur.

## 6.2.2 Approche par l'intérieur

Comme son nom l'indique, cette approche consiste à trouver des charges supportables en construisant explicitement des champs de contraintes statiquement admissibles et plastiquement admissibles. Il n'existe pas de méthodes systématiques pour cela, aussi nous contenterons nous de l'illustrer sur des exemples.

**EXEMPLE : Torsion.** Reprenons l'exemple de la torsion d'un cylindre plein avec critère de Von Mises. Dans ce cas, le paramètre de chargement est le couple de torsion  $M$  et

$$\mathcal{C} = \{ \underline{\xi} : \underline{\xi} = \underline{0} \text{ sur } S_0, \exists \alpha(\underline{\xi}) \in \mathbb{R} : \underline{\xi} = \alpha(\underline{\xi}) r \underline{e}_\theta \text{ sur } S_L \}, \quad W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = M \alpha(\underline{\xi}).$$

Pour un couple de torsion  $M$  donné, considérons le champ de contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{3M}{2\pi R^3} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta).$$

Il est statiquement admissible (on peut le vérifier soit à partir des équations locales, soit à partir de la formulation variationnelle de l'équilibre). Pour qu'il soit plastiquement admissible, il faut et il suffit que  $|M| \leq 2\pi\sigma_c R^3 / 3\sqrt{3} = M_\ell$ . Par conséquent  $\mathbb{Q}_p \supset [-M_\ell, +M_\ell]$ .

**EXEMPLE : Cylindre sous poids propre.** On considère toujours le même cylindre, mais on fixe la surface latérale et on interdit tout déplacement transversal de la base et du sommet. Autrement dit  $\mathcal{C} = \{ \underline{\xi} : \underline{\xi} = \underline{0} \text{ en } r = R, u_r = u_\theta = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = L \}$ . Le cylindre est soumis à son poids propre, le champ de pesanteur uniforme étant  $\underline{g} = g \underline{e}_z$  et on prend son poids  $P = \rho g \pi R^2 L$  comme paramètre de force généralisée (ce poids pouvant être négatif suivant le sens de la pesanteur). Par conséquent, on a

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = \frac{P}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \xi_z d\Omega,$$

le déplacement généralisé étant ici le déplacement axial moyen. Pour  $P$  donné, prenons pour champ de contraintes celui de la réponse élastique, *i.e.*

$$\underline{\xi} = \frac{P}{4\mu \text{vol}(\Omega)}(R^2 - r^2)\underline{e}_z, \quad \underline{\sigma} = -\frac{Pr}{2 \text{vol}(\Omega)}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r).$$

Pour que  $\underline{\sigma}$  soit plastiquement admissible, il faut et il suffit que  $\sup_{\underline{x} \in \Omega} \sigma_{eq}(\underline{x}) \leq \sigma_c$ . Comme la contrainte équivalente est maximale en  $r = R$  on doit avoir

$$|P| \leq P_e = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sigma_c RL,$$

$P_e$  représentant donc la charge limite élastique. D'où  $\mathbb{Q}_p \supset [-P_e, +P_e]$ .

**EXEMPLE : Traction et torsion d'une armature.** On considère un cylindre composite comportant une armature *rigide* collée à la matrice. La matrice est un matériau élastique parfaitement plastique standard de type Von Mises. La hauteur du cylindre est  $h$ , le rayon de l'armature  $a$  et le rayon du cylindre  $b$ , cf Figure 6.4. La paroi extérieure  $r = b$  est fixée et on exerce sur l'armature un couple de torsion axial  $M\underline{e}_z$  et une force axiale  $F\underline{e}_z$  qui sont les deux paramètres de chargement. Sur la base  $z = 0$  et le sommet  $z = h$  du cylindre, on prend pour conditions aux limites :  $\xi_r = 0$  et  $\sigma_{z\theta} = \sigma_{zz} = 0$ . Le déplacement de l'armature est de la forme  $\underline{\xi} = \alpha a \underline{e}_\theta + q \underline{e}_z$ , l'angle de rotation axiale  $\alpha$  et la translation axiale  $q$  sont les déplacements généralisés associés à  $M$  et  $F$  (on contrôle  $M$  et  $F$ , mais pas  $\alpha$  et  $q$ ). L'ensemble des déplacements admissibles est l'espace vectoriel

$$\mathcal{C} = \{\underline{\xi} : \underline{\xi} = \underline{0} \text{ en } r = b, \xi_r = 0 \text{ en } z = 0, z = h, \underline{\xi} = \alpha(\underline{\xi})a\underline{e}_\theta + q(\underline{\xi})\underline{e}_z \text{ en } r = a\},$$

alors que le travail des efforts extérieurs donnés s'écrit  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = M\alpha(\underline{\xi}) + Fq(\underline{\xi})$  pour  $\underline{\xi} \in \mathcal{C}$ .

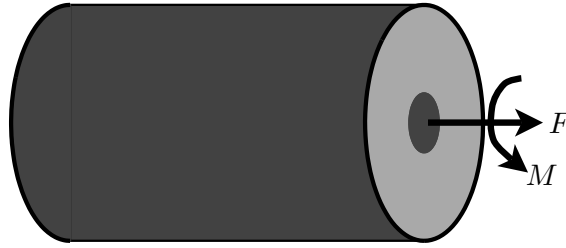


FIGURE 6.4 – Traction et torsion d'une armature.

Pour  $M$  et  $F$  donnés, considérons le champ de contraintes

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = -\frac{M}{2\pi h r^2} \underline{e}_r \otimes_s \underline{e}_\theta - \frac{F}{2\pi h r} \underline{e}_r \otimes_s \underline{e}_z.$$

Il est statiquement admissible. Pour qu'il soit plastiquement admissible, il faut et il suffit que  $\sigma_{eq}(\underline{x}) \leq \sigma_c$  pour tout  $\underline{x} \in \Omega$ . Or  $\sigma_{eq} = \sqrt{3(\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{rz}^2)}$  est maximal en  $r = a$ . Donc  $\underline{\sigma}$  est statiquement admissible si  $M^2/M_\ell^2 + F^2/F_\ell^2 \leq 1$  avec

$$M_\ell = F_\ell a, \quad F_\ell = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} a h \sigma_c.$$

Cela correspond à une ellipse du plan  $(F, M)$ . Par conséquent, on a

$$\mathbb{Q}_p \supset \left\{ (F, M) \in \mathbb{R}^2 : \frac{F^2}{F_\ell^2} + \frac{M^2}{M_\ell^2} \leq 1 \right\}.$$

### 6.2.3 Approche par l'extérieur

#### Présentation de la méthode

L'approche par l'extérieur consiste à éliminer des charges en montrant qu'elles ne sont pas supportables. On construit pour cela des champs de déplacement cinématiquement admissibles et on s'appuie sur des propriétés énergétiques. On a besoin d'introduire au préalable la *fonction d'appui* d'un convexe.

**Définition de la fonction d'appui d'un convexe.** Soit  $\mathbb{S}$  un ensemble convexe fermé de  $\mathbb{M}_s^3$ . On appelle fonction d'appui de  $\mathbb{S}$  la fonction  $\pi_{\mathbb{S}}$  définie sur  $\mathbb{M}_s^3$  et à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  :

$$\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

La fonction d'appui<sup>9</sup> jouit de propriétés génériques que nous soulignerons un peu plus loin.

L'approche par l'extérieur part de la formulation variationnelle de l'équilibre. Si  $\underline{\underline{\sigma}}$  est un champ de contraintes statiquement admissibles avec les charges  $\underline{Q}$ , alors

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega = \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathcal{C}.$$

Pour qu'il soit plastiquement admissible, on doit avoir  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in \mathbb{S}(\underline{x})$ ,  $\forall \underline{x} \in \Omega$ . En vertu de la définition de la fonction d'appui, on a

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega \leq \mathcal{D}(\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathcal{C}$$

où

$$\mathcal{D}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \int_{\Omega} \pi_{\mathbb{S}(\underline{x})}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})) \, d\Omega$$

Par conséquent, pour que  $\underline{Q}$  soit supportable, il faut que  $\forall \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \geq \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\underline{\varepsilon}})$ . Ce n'est *a priori* qu'une condition nécessaire, mais on démontre dans le cadre de la plasticité parfaite standard qu'elle est aussi suffisante. Nous admettrons ce résultat. Ce faisant nous avons obtenu une deuxième caractérisation des *charges supportables* :

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \underline{Q} \in \mathbb{R}^n : \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{D}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \geq \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\underline{\varepsilon}}) \right\}.$$

9. On la note simplement  $\pi$  si le convexe  $\mathbb{S}$  est donné par le contexte.

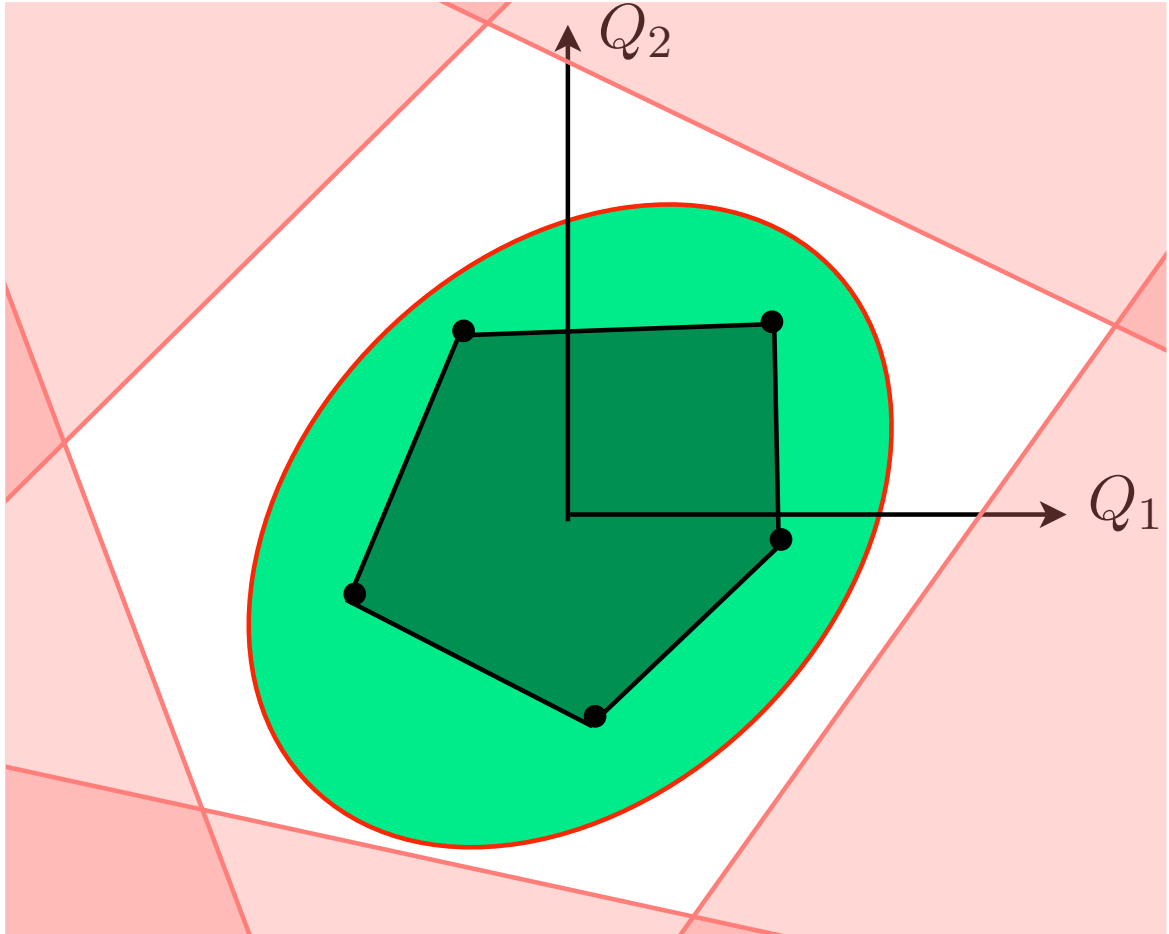


FIGURE 6.5 – Illustration des approches par l'intérieur et par l'extérieur du domaine  $Q_p$  des charges supportables (en vert clair) dans le cas d'un chargement à deux paramètres. Dans l'approche par l'intérieur, après avoir construit des charges supportables (points noirs), on peut construire un domaine de charges supportables en prenant l'enveloppe convexe des points (en vert foncé). On peut aussi s'appuyer sur les propriétés de symétrie. Dans l'approche par l'extérieur, on élimine des demi-espaces à chaque choix de champs de vitesses (zones rouges). On peut aussi utiliser les propriétés de symétrie pour éliminer par symétrie d'autres demi-espaces.

Cette propriété des charges supportables s'interprète en termes d'énergie. Si l'on considère que les  $\underline{\xi}$  sont des vitesses et non des déplacements,  $\sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi})$  représente la puissance des efforts extérieurs donnés au niveau de charge  $\underline{Q}$  dans le champ de vitesses  $\underline{\xi}$ . La quantité  $\mathcal{D}(\underline{\xi})$  peut s'interpréter comme une puissance dissipée par la structure dans un écoulement plastique où la vitesse des déformations plastiques  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$  serait égale à la vitesse des déformations  $\underline{\dot{\varepsilon}}$ , *i.e.* en négligeant la vitesse des déformations élastiques  $\underline{\dot{\varepsilon}}^e$ . En effet, d'après le principe du travail plastique maximal de Hill, on a  $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \geq \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\varepsilon}}^p$  :  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$ ,  $\forall \underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}$ . Par conséquent

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \geq \sup_{\underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}} \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\varepsilon}}^p = \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\dot{\varepsilon}}^p).$$

Mais comme  $\underline{\sigma} \in \mathbb{S}$ , on a évidemment l'inégalité inverse par définition de la fonction d'appui. Par conséquent, il y a égalité  $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p = \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\dot{\varepsilon}}^p)$ . Comme  $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p$  représente la puissance volumique dissipée plastiquement, il en est de même de  $\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\dot{\varepsilon}}^p)$ . Si l'on néglige  $\underline{\dot{\varepsilon}}^e$  devant  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$ , on obtient donc que  $\mathcal{D}(\underline{\xi})$  représente la puissance dissipée plastiquement par toute la structure dans cette vitesse d'écoulement  $\underline{\xi}$ . On a par conséquent l'interprétation suivante des charges supportables

**Caractérisation énergétique des charges supportables.** *Une charge est supportable par la structure si et seulement si la puissance dissipée dans toute vitesse d'écoulement admissible est supérieure ou égale à la puissance des efforts extérieurs à ce niveau de charge dans cette vitesse admissible.*

En pratique, on se sert de cette caractérisation pour trouver des charges qui ne sont pas supportables. En effet en prenant la contraposée on obtient aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une charge soit *non supportable* :

$\underline{Q}$  est non supportable si et seulement s'il existe  $\underline{\xi} \in \mathcal{C}$  tel que  $\mathcal{D}(\underline{\xi}) < \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi})$ .

On procède alors de la façon suivante :

1. On se donne un champ de vitesses  $\underline{\xi}$  admissible tel que  $\mathcal{D}(\underline{\xi}) < +\infty$  et tel que  $q_i(\underline{\xi}) \neq 0$  pour au moins un  $i$  ;
2. On en déduit que toutes les charges  $\underline{Q}$  situées dans le demi-espace  $\sum_{i=1}^n q_i(\underline{\xi}) Q_i > \mathcal{D}(\underline{\xi})$  sont non supportables.

En changeant de champ de vitesses, on obtient ainsi un "encadrement" de  $\mathbb{Q}_p$  par des familles de demi-espaces extérieurs à  $\mathbb{Q}_p$ . L'encadrement est d'autant meilleur que l'on choisit bien les champs de vitesses. Il faut donc "sentir" comment la structure a envie de s'écouler. Notons qu'il est essentiel de choisir des vitesses dont la puissance dissipée soit finie, sinon on n'élimine aucune charge. De même, il faut que la puissance des efforts extérieurs ne soit pas nulle sinon, comme la puissance dissipée est non négative, on n'élimine également aucune charge. Dans tous les autres cas, on élimine un demi-espace. Le principe de cette approche par l'extérieur est schématisé sur la Figure 6.5.

## Propriétés et exemples de fonctions d'appui

Voici quelques propriétés génériques et très utiles de la fonction d'appui d'un convexe  $\mathbb{S}$  de  $\mathbb{M}_s^3$ , données sans démonstration (la plupart sont évidentes)

1.  $\pi_{\mathbb{S}}$  est convexe et positivement homogène de degré 1, *i.e.*  $\pi_{\mathbb{S}}(k\underline{\varepsilon}) = k\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\varepsilon})$ ,  $\forall k > 0$  ;



2.  $\pi_{\mathbb{S}}$  est non négative si  $\mathbb{S}$  contient  $\underline{0}$ ;
3.  $\pi_{\mathbb{S}}$  est homogène de degré 1 si  $\mathbb{S}$  est centré en  $\underline{0}$ , i.e.  $\pi_{\mathbb{S}}(k\underline{\varepsilon}) = |k| \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\varepsilon})$ ,  $\forall k \neq 0$ ;
4.  $\pi_{\mathbb{S}}$  prend la valeur  $+\infty$  seulement si  $\mathbb{S}$  est non bornée. En particulier, si  $\mathbb{S}$  est non borné dans la direction des tenseurs sphériques, alors  $\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\varepsilon}) = +\infty$  quand  $\text{Tr } \underline{\varepsilon} \neq 0$ .

Voici les fonctions d'appui pour le convexe de Von Mises et celui de Tresca où on pourra vérifier directement toutes les propriétés annoncées. Dans le cas du convexe de Tresca, la fonction d'appui s'exprime en termes des déformations principales  $\varepsilon_i$  de  $\underline{\varepsilon}$ .

<b>Convexe de Von Mises</b>	$\pi_{\text{VM}}(\underline{\varepsilon}) = \begin{cases} \sigma_c \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon}} & \text{si } \text{Tr } \underline{\varepsilon} = 0 \\ +\infty & \text{si } \text{Tr } \underline{\varepsilon} \neq 0 \end{cases}$
-----------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<b>Convexe de Tresca</b>	$\pi_{\text{T}}(\underline{\varepsilon}) = \begin{cases} \frac{\sigma_c}{2} ( \varepsilon_1  +  \varepsilon_2  +  \varepsilon_3 ) & \text{si } \text{Tr } \underline{\varepsilon} = 0 \\ +\infty & \text{si } \text{Tr } \underline{\varepsilon} \neq 0 \end{cases}$
--------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Exercice 6.3.** Etablir l'expression des fonctions d'appui du convexe de Von Mises et du convexe de Tresca. (Pour le convexe de Tresca, on admettra que le sup est atteint quand  $\underline{\varepsilon}$  est diagonal dans la même base que  $\underline{\varepsilon}$ .)

### Exemples d'illustration de l'approche par l'extérieur

On reprend les différents exemples traités dans l'approche par l'intérieur. L'objectif est d'obtenir dans chaque cas l'inclusion inverse pour  $\mathbb{Q}_p$  en construisant les bons champs de vitesses. Ces champs de vitesses "optimaux" qui permettent de déterminer les charges limites sont appelés *mécanismes de ruine*. Ils ne sont pas en général uniques.

**EXEMPLE : Torsion.** Prenons  $\underline{\xi} = r \frac{z}{L} \underline{e}_\theta$ . Ce champ est admissible, on reconnaît là la forme du champ de déplacement (ou de vitesse) solution du problème d'évolution. Les déformations associées sont  $\underline{\varepsilon} = \frac{r}{L} \underline{e}_\theta \otimes_s \underline{e}_z$ . Etant de trace nulle, on a  $\pi_{\text{VM}}(\underline{\varepsilon}) = \frac{\sigma_c r}{L\sqrt{3}}$  et donc  $\mathcal{D}(\underline{\xi}) = M_\ell$ . Comme  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = M$ , on en déduit que tous les  $M > \mathcal{D}(\underline{\xi}) = M_\ell$  sont non supportables. Par symétrie, tous les  $M < -M_\ell$  le sont aussi (on peut le voir en changeant  $\underline{\xi}$  en  $-\underline{\xi}$ ). En comparant avec l'approche par l'intérieur, on peut conclure que  $\mathbb{Q}_p = [-M_\ell, +M_\ell]$ . Ce champ  $\underline{\xi}$  est donc un mécanisme de ruine, ce qui est conforme à ce que nous avons obtenu en résolvant le problème d'évolution.

**EXEMPLE : Cylindre sous poids propre.** L'objectif ici est double. On va montrer que la charge limite coïncide avec la charge limite élastique et donc qu'il n'y a pas d'écrouissage structurel possible. Toutefois, on va utiliser pour cela une famille de champs de vitesses admissibles qui tend vers un champ discontinu en  $r = R$  et ne respectant plus la condition à la limite  $\xi_z = 0$ . Ce deuxième point se prête à une généralisation que nous proposerons après cet exemple.

Soit  $h \in (0, R)$ , on note  $\Omega_h$  la partie du cylindre comprise entre  $r = R - h$  et  $r = R$ . On définit la famille de champs  $\underline{\xi}_h$  suivante :

$$\underline{\xi}_h(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{e}_z & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_h \\ \frac{R-r}{h} \underline{e}_z & \text{dans } \Omega_h \end{cases}.$$

Ces champs sont admissibles mais convergent vers la translation  $\underline{e}_z$  quand  $h$  tend vers 0, translation qui ne respecte plus la condition de fixation en  $r = R$ . Leur champ de déformation associé est nul dans  $\Omega \setminus \Omega_h$  et est égal à  $-\frac{1}{h} \underline{e}_r \otimes_s \underline{e}_z$  dans  $\Omega_h$ . Il est de trace nulle et on a

$$\mathcal{D}(\underline{\xi}_h) = \frac{\text{vol}(\Omega_h)}{h\sqrt{3}} \sigma_c, \quad W_{\text{ext}}(\underline{\xi}_h) = P \left( \frac{\text{vol}(\Omega \setminus \Omega_h)}{\text{vol}(\Omega)} + \frac{1}{h \text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega_h} (R - r) d\Omega \right).$$

Tous les  $P$  tels que  $\mathcal{D}(\underline{\xi}_h) < W_{\text{ext}}(\underline{\xi}_h)$  sont non supportables. En passant à la limite comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{D}(\underline{\xi}_h) = 2\pi R L \sigma_c / \sqrt{3} = P_e \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} W_{\text{ext}}(\underline{\xi}_h) = P,$$

on en déduit que tous les  $P > P_e$  sont non supportables. On a donc obtenu que la charge limite est égale à la charge limite élastique,  $\mathbb{Q}_p = [-P_e, +P_e]$ . Notons que cette démonstration a exigé d'envisager un mécanisme de ruine correspondant à un détachement “en bloc” du cylindre de son encastrement.

L'exemple du cylindre sous poids propre suggère que l'on peut avoir besoin de considérer des champs de vitesses discontinus sur certaines surfaces (intérieures ou à la frontière) pour obtenir la bonne estimation des charges limites. Il n'y a aucun principe physique qui s'y oppose si ce n'est que les quantités énergétiques mises en jeu doivent rester finies. On peut généraliser la méthode de construction de tels champs discontinus suivie dans l'exemple précédent à partir d'une suite de champs réguliers admissibles  $\underline{\xi}_h$  convergeant vers le champ discontinu  $\underline{\xi}$ . En passant à la limite dans les expressions de  $\mathcal{D}(\underline{\xi}_h)$  et de  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}_h)$  on obtient une version étendue de la caractérisation des charges supportables incluant les champs de vitesse discontinus.

Plus précisément, soit  $\underline{\xi}$  un champ de vitesses discontinu à travers une surface  $\Sigma$  de normale  $\underline{n}$ , surface qui peut être toute ou partie de la frontière  $\partial\Omega$ <sup>10</sup>. Son saut sur  $\Sigma$  est noté  $\llbracket \underline{\xi} \rrbracket$ . Le gradient de  $\underline{\xi}$  est défini classiquement en dehors de  $\Sigma$  et peut être vu comme une masse de Dirac sur  $\Sigma$ ,  $\nabla \underline{\xi} = \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \otimes_s \underline{n} \delta_\Sigma$ . De même le champ de déformation associé est défini classiquement en dehors de  $\Sigma$  et peut être considéré comme une mesure de Dirac sur la surface, *i.e.*  $\underline{\varepsilon} = \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \otimes_s \underline{n} \delta_\Sigma$ . En reportant dans la définition de la puissance dissipée, on obtient l'expression généralisée

$$\mathcal{D}(\underline{\xi}) = \int_{\Omega \setminus \Sigma} \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\varepsilon}) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi_{\mathbb{S}}(\llbracket \underline{\xi} \rrbracket \otimes_s \underline{n}) d\Sigma.$$

Evidemment, de tels champs discontinus ne sont utiles pour déterminer les charges qui ne sont pas supportables que dans la mesure où la puissance dissipée est finie. Par conséquent pour un matériau

10. Comme  $\underline{\xi}$  peut être discontinu sur la partie du bord  $\partial_D \Omega$  où les déplacements sont imposés, on peut toujours vérifier la condition de Dirichlet à l'aide de la limite “extérieure”  $\underline{\xi}^+$  de  $\underline{\xi}$ . Par contre la limite intérieure  $\underline{\xi}^-$  n'a pas à la vérifier. La condition d'admissibilité des champs est donc elle-même affaiblie.

qui est *plastiquement incompressible*, on doit prendre  $\underline{\xi}$  de façon à ce que  $\text{Tr } \underline{\varepsilon} = 0$ . Sur une surface de discontinuité  $\text{Tr } \underline{\varepsilon} = \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{n}$  et donc l'incompressibilité plastique oblige à n'envisager que *des discontinuités tangentielles* qui correspondent à des *bandes de cisaillement* :

<b>Pour un matériau plastiquement incompressible</b>	$\llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma.$
------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------

Pour ce qui concerne la puissance des efforts extérieurs donnés, dans la mesure où ces efforts correspondent à des forces volumiques et des forces surfaciques, l'expression de  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi})$  n'est pas affectée par le fait que  $\underline{\xi}$  soit discontinu et reste inchangée<sup>11</sup>.

Comme première application, vérifions que l'on retrouve bien les résultats de l'exemple du cylindre sous poids propre. Soit  $\underline{\xi} = \underline{e}_z$ , ce champ est discontinu sur la surface latérale  $\Sigma = \{\underline{x} : r = R, 0 \leq z \leq L\}$ . Comme  $\underline{n} = \underline{e}_r$ , la discontinuité est tangentielle. Comme  $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$  dans  $\Omega$ ,  $\mathcal{D}(\underline{\xi})$  se réduit au terme sur  $\Sigma$ ,  $\mathcal{D}(\underline{\xi}) = 2\pi RL\sigma_c/\sqrt{3}$ , alors que  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = P$ . On retombe bien sur les mêmes résultats.

Nous allons utiliser cette extension de l'approche par l'extérieur pour construire de bons mécanismes de ruine dans l'exemple de la traction et torsion d'une armature.

**EXEMPLE : Traction et torsion d'une armature.** Envisageons pour mécanisme de ruine la famille de champs discontinus suivants,

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega, \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket = \alpha a \underline{e}_\theta + q \underline{e}_z \text{ sur } \Sigma = \{\underline{x} : r = a, 0 \leq z \leq h\}, \quad (\alpha, q) \in \mathbb{R}^2$$

qui consistent donc à envisager un "détachement" de l'armature par rotation et translation axiales. La normale à  $\Sigma$  étant  $\underline{e}_r$ , la discontinuité est tangentielle et

$$\pi_{\text{VM}}(\llbracket \underline{\xi} \rrbracket \otimes_s \underline{e}_r) = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \sqrt{\alpha^2 a^2 + q^2}, \quad \mathcal{D}(\underline{\xi}) = F_\ell \sqrt{\alpha^2 a^2 + q^2}, \quad W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = M\alpha + Fq.$$

On en déduit que, pour  $(\alpha, q)$  donné, les couples  $(F, M)$  tels que

$$M\alpha + Fq > F_\ell \sqrt{\alpha^2 a^2 + q^2}$$

sont non supportables. Soit  $\omega \in [0, 2\pi[$ , prenons  $\alpha = \cos \omega$  et  $q = a \sin \omega$ . Les  $(F, M)$  tels que  $M \cos \omega + Fa \sin \omega > F_\ell a$  sont non supportables. Considérons  $F = k F_\ell \sin \omega$  et  $M = k M_\ell \cos \omega$ . Ce couple est non supportable si  $k > 1$ . Par conséquent, l'extérieur de l'ellipse  $M^2/M_\ell^2 + F^2/F_\ell^2 = 1$  est non supportable. En comparant avec l'approche par l'intérieur, on en déduit que

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ (F, M) \in \mathbb{R}^2 : \frac{F^2}{F_\ell^2} + \frac{M^2}{M_\ell^2} \leq 1 \right\}.$$

---

11. Par contre, si les efforts extérieurs contiennent des précontraintes volumiques  $\underline{\sigma}^0$ , alors l'expression de la puissance de ces précontraintes dans les déformations associées à un  $\underline{\xi}$  discontinu doit être modifiée pour prendre en compte les sauts de  $\underline{\xi}$  sur  $\Sigma$  :

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}) = \dots + \int_{\Omega \setminus \Sigma} \underline{\sigma}^0 : \underline{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Sigma} \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n} d\Sigma.$$

## 6.3 Contraintes résiduelles

Après qu'une structure ait plastifié sous l'effet d'un chargement au delà de la charge limite élastique, si on la décharge en ramenant à 0 tous les efforts extérieurs et donc en particulier  $\underline{f}$  et  $\underline{T}$ <sup>12</sup> il reste en général des contraintes dans la structure. Ces contraintes s'appellent *contraintes résiduelles*. Leur existence est due à l'incompatibilité des déformations plastiques. Il s'avère que l'on peut tirer bénéfice de cette propriété pour "protéger" les structures d'agression extérieure en créant des contraintes de compression à la surface qui freinent, voire empêchent, la création et la propagation de fissures.

### 6.3.1 Contraintes résiduelles et incompatibilité des déformations plastiques

Supposons que la structure ait été libérée de tout effort extérieur et qu'à la fin de cette décharge le champ de déformation plastique soit  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ <sup>13</sup>. L'état final  $(\underline{\xi}_r, \underline{\underline{\sigma}}_r)$  des déplacements et des contraintes à la fin de la décharge est donc donné par le problème d'élasticité suivant dans lequel les déformations plastiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  jouent le rôle de prédéformations :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}_r = \underline{0}, \quad \underline{\underline{\sigma}}_r = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}_r - \underline{\underline{\varepsilon}}^p), \quad 2\underline{\underline{\varepsilon}}_r = \nabla \underline{\xi}_r + (\nabla \underline{\xi}_r)^T \quad \text{dans } \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}_r \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (6.20)$$

Notons que l'on suppose ici que les forces volumiques et les forces surfaciques sont ramenées à 0. Ceci peut être difficile voire impossible à réaliser en pratique, en particulier en ce qui concerne les forces volumiques. (On ne peut pas en général s'affranchir de la pesanteur.) Cela peut aussi nécessiter de changer de type de contrôle des conditions aux limites. Ainsi si on contrôle les déplacements sur la partie du bord  $\partial_D\Omega$  durant la montée en charge jusqu'à amener les déplacements à  $\underline{\xi}^d$ , il ne faut pas en général ramener les déplacements à  $\underline{0}$  sur  $\partial_D\Omega$  pour ne plus avoir d'efforts extérieurs. On peut évidemment affaiblir cette notion de décharge et supposer simplement que seules certaines données de chargement sont remises à 0. Pour simplifier la présentation, nous nous en tiendrons à cette version "forte" de la décharge dans ce paragraphe. Nous en verrons une affaiblie dans le cas de la torsion.

Distinguons deux cas, suivant que les déformations plastiques finales sont compatibles ou non<sup>14</sup>

1. *Cas où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  est compatible.* Dans ce cas, il existe un champ de déplacements  $\underline{\xi}$  tel que  $2\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \nabla \underline{\xi} + \nabla \underline{\xi}^T$ . En reportant dans (6.20) on voit que  $\underline{\xi}_r(\underline{x}) = \underline{\xi}(\underline{x}) + \underline{a} + \underline{\omega} \wedge \underline{x}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_r = \underline{0}$  sont solutions (avec  $\underline{a}$  et  $\underline{\omega}$  arbitraires dans  $\mathbb{R}^3$ ). (Et on sait que ce sont les seules solutions.) Autrement dit, il n'y a pas de contraintes résiduelles.
2. *Cas où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  n'est pas compatible.* Dans ce cas, il y a nécessairement des contraintes résiduelles, *i.e.*  $\underline{\underline{\sigma}}_r \neq \underline{0}$ . En effet, si  $\underline{\underline{\sigma}}_r = \underline{0}$ , alors  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{\varepsilon}}_r$  et donc  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  est compatible, ce qui est une contradiction.

12. Cette notion de décharge complète et de libération des efforts extérieurs demande à être définie précisément. C'est discuté un peu plus loin dans cette section.

13. Il est tout à fait possible, et même fréquent, que les déformations plastiques évoluent durant la phase de décharge. Dans ce cas, c'est le champ de déformation plastique *final* qui compte (et pas celui à la fin de la montée en charge) pour calculer les contraintes résiduelles.

14. Rappelons qu'un champ de tenseurs symétriques  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est dit compatible (sous-entendu avec un champ de vecteurs) s'il existe un champ de vecteurs  $\underline{\xi}$  tel que  $2\underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla \underline{\xi} + \nabla \underline{\xi}^T$ . L'utilisation de cette définition en Mécanique des Milieux Continus se justifie pour savoir si le champ de tenseurs considéré est un champ de déformations dans la mesure où l'on s'est placé dans le cadre des petites perturbations et où l'on linéarise la relation déformation-déplacement.

Conclusion : Il existe des contraintes résiduelles après décharge *si et seulement si* les déformations plastiques à la fin de la décharge sont incompatibles.

### 6.3.2 L'exemple de la torsion

Reconsidérons le problème de torsion d'un arbre cylindrique plein parfaitement plastique. Après une montée en charge qui amène l'angle de rotation à la valeur  $\alpha_* > \alpha_e$ , le couple de torsion valant alors  $M_*$ , on procède à une décharge en diminuant l'angle de torsion jusqu'à une valeur  $\alpha_r$  telle que le couple de torsion soit nul. Durant cette décharge, la base  $S_0$  reste fixée et les déplacements du sommet  $S_L$  restent de la forme  $\alpha r \underline{e}_\theta$ . Ce contrôle des déplacements tangentiels s'accompagne de cisaillements  $\sigma_{z\theta}$  qui ne sont généralement pas nuls. On est donc dans la situation d'une annulation partielle des efforts extérieurs, seule l'intégrale  $\int_S r \sigma_{z\theta} dS$  est nulle. Annuler les cisaillements sur  $S_0$  et  $S_L$  ferait perdre l'invariance par translation dans la direction  $z$  et rendrait le problème tridimensionnel. Limitons-nous à calculer les contraintes résiduelles à la fin de cette remise à 0 du couple de torsion.

À la fin de la montée en charge, l'arbre est plastifié dans la couronne cylindrique  $R_e(\alpha_*) < r < R$  et le champ de déformation plastique vaut alors

$$\underline{\varepsilon}_*^p(r) = \gamma_*^p(r)(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \gamma_*^p(r) = \left( \frac{\alpha_* r}{2L} - \frac{\sigma_c}{2\mu\sqrt{3}} \right)^+$$

où le  $+$  désigne la partie positive, *i.e.*  $a^+ = \max\{a, 0\}$ . Commençons par vérifier que ce champ est incompatible, *i.e.* qu'il n'existe pas de champ de déplacement admissible  $\underline{\xi}$  dont  $\underline{\varepsilon}_*^p$  serait le champ de déformation associé. On peut se servir de la démonstration du résultat d'unicité<sup>15</sup> (Propriété 6.1.3) où on a montré que si un tel champ existe, il est nécessairement égal à  $\alpha_* r z / H \underline{e}_\theta$ . Or le champ de déformation correspondant est manifestement différent de  $\underline{\varepsilon}_*^p$ . Donc ces déformations plastiques sont incompatibles.

Montrons maintenant que la décharge est élastique, *i.e.* que les déformations plastiques n'évoluent pas. On va s'appuyer sur le résultat général d'unicité des contraintes et on pourrait montrer comme on l'a fait pour la phase de chargement qu'il y a également unicité des déplacements et des déformations plastiques (du fait que le cylindre est plein et qu'il reste donc toujours un noyau élastique). Cette vérification est laissée à titre d'exercice. Par conséquent les déplacements sont donnés par (6.8) à tout instant et les seules composantes non nulles des déformations, des déformations plastiques et des contraintes sont  $\theta z$  et  $z\theta$ , cf (6.9)–(6.11). Leur évolution est toujours régie par (6.12). Considérons un point matériel  $r$ . Au début de la décharge, son comportement est élastique et on a

$$\tau(r) = 2\mu \left( \frac{\alpha r}{2L} - \gamma_*^p \right) = \tau_*(r) + \mu(\alpha - \alpha_*) \frac{r}{L},$$

$\tau(r)$  diminuant avec  $\alpha$ . Ce point plastifiera lorsque  $\tau(r) = -\sigma_c/\sqrt{3}$  et donc lorsque  $\alpha = \alpha_d(r)$ ,

$$\alpha_d(r) = \begin{cases} \alpha_* - 2\alpha_e R/r & \text{si } r > \alpha_e R/\alpha_* \\ -\alpha_e R/r & \text{si } r < \alpha_e R/\alpha_* \end{cases}.$$

---

15. On pourrait également raisonner à partir des équations de compatibilité et vérifier qu'elles ne sont pas satisfaites.

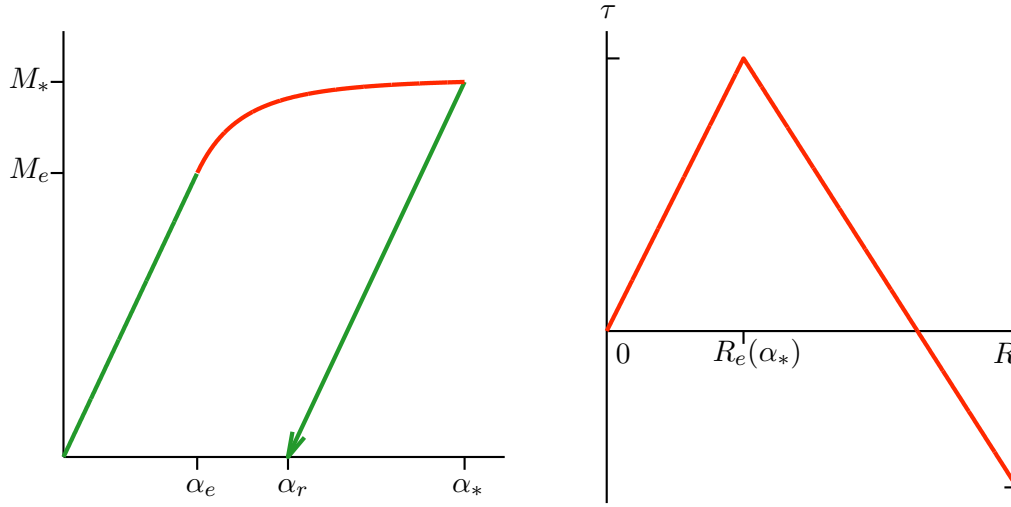


FIGURE 6.6 – À gauche : Réponse globale du cylindre sous chargement de torsion suivi d’une décharge ; à droite, cisaillements résiduels à la fin de la décharge.

On voit donc que le cylindre recommencera à plastifier en  $r = R$  quand  $\alpha = \max_{r \in [0, R)} \alpha_d(r) = \alpha_* - 2\alpha_e$ . À ce moment-là le couple de torsion sera égal à  $M_* - 2M_e$ . Comme  $0 < M_* < M_\ell = 4M_e/3$ , on a  $M_* - 2M_e < 0$ . Donc le cylindre commencera à re-plastifier quand le couple de torsion sera négatif. Comme on arrête la décharge quand le couple s’annule, toute la phase de décharge est élastique.

Calculons la valeur  $\alpha_r$  de l’angle de torsion à la fin de la décharge. Comme le couple de torsion est nul, on a  $0 = \int_S r \tau_r(r) dS = M_* - M_e(\alpha_* - \alpha_r)/\alpha_e$ , cf Figure 6.6. D’où

$$\alpha_r = \alpha_* - \frac{M_*}{M_e} \alpha_e.$$

Finalement, à la fin de la décharge, les cisaillements résiduels valent

$$\tau_r(r) = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \left( \min \left\{ 1, \frac{r \alpha_*}{R \alpha_e} \right\} - \frac{M_* r}{M_e R} \right).$$

On notera qu’ils ont changé de signe durant la décharge près de la surface latérale, cf Figure 6.6.

## 6.4 Résolution numérique du problème d’évolution

### 6.4.1 Le problème incrémental en temps

Il est évidemment impossible en général de résoudre exactement le problème d’évolution élasto-plastique. Il faut avoir recours à des méthodes d’approximation. Les méthodes d’approximation numériques usuelles se basent sur une discrétisation du problème. Comme le problème d’élasto-plasticité est un problème d’évolution, cette discrétisation porte à la fois sur le temps et sur l’espace. Nous allons introduire ici la discrétisation en temps, la discrétisation en espace est présentée dans des cours spécialisés

comme le Cours d'Eléments Finis. L'intervalle de temps  $[0, T)$  est divisé en sous-intervalles  $[t_{i-1}, t_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$  avec

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_{N-1} < t_N = T.$$

On note  $(\underline{\xi}_i, \underline{\varepsilon}_i, \underline{\varepsilon}_i^p, \underline{\sigma}_i)$  l'état de la structure à l'instant  $t_i$ . Pour le déterminer, on procède par induction : connaissant l'état initial et la séquence discrétisée de chargements on calcule l'état à l'instant  $t_i$  à partir de l'état à l'instant  $t_{i-1}$  et du chargement à l'instant  $t_i$ . Ce problème est appelé *problème incrémental en temps*. Il consiste en la version discrétisée des différentes équations du problème d'évolution.

**L'équilibre à l'instant  $t_i$  :**

$$\operatorname{div} \underline{\sigma}_i + \underline{f}_i = \underline{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (6.21)$$

**La relation contrainte-déformation à l'instant  $t_i$  :**

$$\underline{\sigma}_i = \underline{C} : (\underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^p) \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (6.22)$$

**La relation déformation-déplacement à l'instant  $t_i$  :**

$$2\underline{\varepsilon}_i = \underline{\nabla} \underline{\xi}_i + \underline{\nabla} \underline{\xi}_i^T \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (6.23)$$

**La loi standard de plasticité parfaite à l'instant  $t_i$  :**

$$\underline{\sigma}_i \in \mathbb{S}, \quad (\underline{\sigma}_i - \underline{\sigma}^*) : (\underline{\varepsilon}_i^p - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p) \geq 0 \quad \forall \underline{\sigma}^* \in \mathbb{S} \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (6.24)$$

**Les conditions aux limites à l'instant  $t_i$  :**

$$\begin{cases} \underline{\xi}_i = \underline{\xi}_i^d, & \text{sur} \quad \partial_D \Omega \\ \underline{\sigma}_i \cdot \underline{n} = \underline{T}_i, & \text{sur} \quad \partial_N \Omega \end{cases} \quad (6.25)$$

Les données  $\underline{f}_i$ ,  $\underline{\xi}_i^d$  et  $\underline{T}_i$  correspondent aux forces volumiques, déplacements imposés et forces surfaciques imposées à l'instant  $t_i$ . On voit que la loi d'écoulement discrétisée (6.24) consiste simplement à écrire l'inégalité de Hill en remplaçant la vitesse de déformation plastique  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$  par l'incrément de déformation plastique  $\underline{\varepsilon}_i^p - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p$ , l'incrément de temps  $t_i - t_{i-1}$  disparaissant par homogénéité. C'est la présence de  $\underline{\varepsilon}_{i-1}^p$  dans (6.24) qui couple les différents instants et nécessite de procéder par induction.

## 6.4.2 Interprétation énergétique dans le cas standard

La fonction d'appui  $\pi_{\mathbb{S}}$  du domaine de réversibilité  $\mathbb{S}$  est par définition

$$\pi_{\mathbb{S}}(\underline{e}) = \sup_{\underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}} \underline{\sigma}^* : \underline{e}.$$

Comme la puissance volumique dissipée est égale à  $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p$ , on a en vertu du principe du travail plastique maximal de Hill

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p = \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\dot{\varepsilon}}^p).$$

En effet, on tire du principe de Hill que  $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \geq \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\varepsilon}}^p$  pour tout  $\underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}$ . Par conséquent, on a  $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \geq \sup_{\underline{\sigma}^* \in \mathbb{S}} \underline{\sigma}^* : \underline{\dot{\varepsilon}}^p = \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\dot{\varepsilon}}^p)$ . Mais comme  $\underline{\sigma} \in \mathbb{S}$ , on a aussi, par définition de  $\pi_{\mathbb{S}}$ ,  $\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\dot{\varepsilon}}^p) \geq \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p$ . D'où l'égalité.

L'énergie volumique dissipée durant l'intervalle de temps  $(t_{i-1}, t_i)$  est approchée par  $\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p)$  après discrétisation en temps. Si l'on note  $\mathcal{D}_i$  l'énergie dissipée dans toute la structure entre l'instant 0 et l'instant  $t_i$ , on a

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{i-1} + \int_{\Omega} \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) d\Omega.$$

L'énergie potentielle de la structure à l'instant  $t_i$  est donnée par

$$\mathcal{P}_i = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}_i - \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}_i - \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p) d\Omega - W_{\text{ext}}^i(\underline{\underline{\xi}}_i)$$

avec

$$W_{\text{ext}}^i(\underline{\underline{\xi}}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}_i \cdot \underline{\underline{\xi}} d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{\underline{T}}_i \cdot \underline{\underline{\xi}} dS.$$

Si on définit l'énergie totale  $\mathcal{E}_i$  de la structure à l'instant  $t_i$  comme la somme de son énergie potentielle à cet instant et de l'énergie dissipée jusqu'à cet instant, on a  $\mathcal{E}_i = \mathcal{P}_i + \mathcal{D}_i$ .

Soit  $\mathcal{C}_i = \{\underline{\underline{\xi}} : \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}_i^d \text{ sur } \partial_D \Omega\}$  l'ensemble des déplacements admissibles à l'instant  $t_i$  dont l'espace vectoriel associé est  $\mathcal{C}_0 = \{\underline{\underline{\xi}} : \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \partial_D \Omega\}$  (il ne dépend pas de  $i$  du fait des hypothèses simplificatrices faites sur le chargement). Considérons un couple  $(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p)^{16}$  avec  $\underline{\underline{\xi}} \in \mathcal{C}_i$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  un champ de déformation plastique virtuel<sup>17</sup>. L'énergie totale qu'aurait la structure à l'instant  $t_i$  si elle était dans cet état serait

$$\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) + \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}^i(\underline{\underline{\xi}}) + \mathcal{D}_{i-1}.$$

On a alors le remarquable résultat suivant

**Minimisation de l'énergie totale.** *Au pas de temps  $i$ , s'il existe un état  $(\underline{\underline{\xi}}_i, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p)$  vérifiant l'ensemble des conditions du problème incrémental, alors cet état minimise l'énergie totale de la structure parmi tous les états admissibles.*

PREUVE. Il s'agit de montrer que si  $(\underline{\underline{\xi}}_i, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p)$  satisfait (6.21)–(6.25) alors

$$\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p) \leq \mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p), \quad \forall \underline{\underline{\xi}} \in \mathcal{C}_i, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}^p. \quad (6.26)$$

Pour cela calculons  $\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p) - \mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p)$  en utilisant les différentes conditions satisfaites par  $(\underline{\underline{\xi}}_i, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p)$ . En

16. Il suffit de connaître  $\underline{\underline{\xi}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  pour en déduire  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Donc l'état de la structure est bien caractérisé par  $(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p)$ .

17. Le champ de déformation plastique virtuel  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  n'a aucune condition d'admissibilité à remplir si ce n'est que l'on doit pouvoir définir l'énergie totale de la structure.



posant  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p)$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  étant les déformations associées à  $\underline{\underline{\xi}}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p) - \mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p) &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) - \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}_i - \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}_i - \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p) \right) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \left( \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) - \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}^i(\underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}_i) \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_i) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_i) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}_i : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_i) d\Omega - W_{\text{ext}}^i(\underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}_i) \\
&+ \int_{\Omega} \left( \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) - \underline{\underline{\sigma}}_i : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) \right) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \left( \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) - \underline{\underline{\sigma}}_i : (\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) \right) d\Omega
\end{aligned}$$

Analysons les différents termes du membre de droite dans la dernière égalité ci-dessus.

- En vertu de la positivité du tenseur des souplesses  $\underline{\underline{S}}$ , le premier terme est positif;
- Comme  $\underline{\underline{\sigma}}_i$  est statiquement admissible, on peut utiliser la formulation variationnelle de l'équilibre. Comme  $\underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}_i \in \mathcal{C}_0$ , on a

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}_i : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_i) d\Omega = W_{\text{ext}}^i(\underline{\underline{\xi}} - \underline{\underline{\xi}}_i);$$

- En vertu de (6.24), on a  $\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) = \underline{\underline{\sigma}}_i : (\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p)$ ;
- Comme  $\underline{\underline{\sigma}}_i \in \mathbb{S}$ , on a aussi, par définition de  $\pi_{\mathbb{S}}$ ,

$$\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p) \geq \underline{\underline{\sigma}}_i : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p).$$

En reportant, on obtient l'inégalité (6.26) cherchée. □

Cette propriété appelle quelques commentaires :

1. Ce résultat généralise le théorème de l'énergie potentielle établi en élasticité linéaire ;
2. Il s'appuie de façon essentielle sur le caractère standard de la loi d'évolution ;
3. Ce n'est plus l'énergie potentielle qui intervient, mais l'énergie totale ;
4. Le problème incrémental est donc une suite de problèmes de minimisation d'énergie ;
5. Il n'existe pas de solution si le chargement n'est pas supportable.
6. On peut démontrer la réciproque, *i.e.* que tout état admissible au pas de temps  $i$  qui minimise l'énergie totale de la structure satisfait aussi toutes les conditions du problème incrémental au pas  $i$ . Toutefois, cette démonstration exige d'introduire quelques techniques supplémentaires de Calcul des Variations. Nous ne la ferons donc pas.

### 6.4.3 Algorithme de résolution

La propriété énergétique de la solution du problème incrémental fournit de façon naturelle une méthode de résolution numérique. L'état au pas  $i$  est celui qui minimise l'énergie totale de la structure. Toutefois ce problème de minimisation à deux champs  $(\underline{\xi}, \underline{\varepsilon}^p)$  est non linéaire et ne peut se résoudre que grâce à un processus itératif. Un algorithme naturel consiste à minimiser alternativement par rapport à  $\underline{\xi}$ , à  $\underline{\varepsilon}^p$  fixé, puis par rapport à  $\underline{\varepsilon}^p$ , à  $\underline{\xi}$  fixé, et d'itérer jusqu'à convergence. Précisément, cet algorithme dit de *minimisation alternée* consiste en les étapes suivantes où le pas de temps  $i$  est fixé,  $\underline{\varepsilon}_{i-1}^p$  est connu et où on construit la suite d'états  $(\underline{\xi}_i^{(n)}, \underline{\varepsilon}_i^{p(n)}) \Big|_{n \in \mathbb{N}}$  devant converger vers  $(\underline{\xi}_i, \underline{\varepsilon}_i^p)$  :

1. On initialise la suite en prenant, par exemple,  $\underline{\varepsilon}_i^{p(0)} = \underline{\varepsilon}_{i-1}^p$  ;
2. Connaissant  $\underline{\varepsilon}_i^{p(n)}$ , on calcule  $\underline{\xi}_i^{(n)}$  en minimisant  $\mathcal{E}_i(\underline{\xi}, \underline{\varepsilon}_i^{p(n)})$  par rapport à  $\underline{\xi}$  dans  $\mathcal{C}_i$  ;
3. Connaissant  $\underline{\xi}_i^{(n)}$ , on calcule  $\underline{\varepsilon}_i^{p(n+1)}$  en minimisant  $\mathcal{E}_i(\underline{\xi}_i^{(n)}, \underline{\varepsilon})$  par rapport à  $\underline{\varepsilon}$ .

Regardons de façon plus détaillée chaque étape.

**Min en  $\underline{\xi}$ .** L'étape de minimisation par rapport à  $\underline{\xi}$ , à  $\underline{\varepsilon}^p$  fixé est un problème d'élasticité linéaire où  $\underline{\varepsilon}_i^{p(n)}$  joue le rôle de prédéformation. Il admet une solution unique (à un déplacement rigide près). Numériquement, en utilisant une discrétisation spatiale du type éléments finis, cela revient à résoudre un système linéaire

$$\underline{K} \underline{U}^{(n)} = \underline{F}^{(n)}$$

où  $\underline{K}$  est la matrice de rigidité (indépendante du pas d'itération) et  $\underline{F}^{(n)}$  est le vecteur force qui prend en compte le chargement à l'instant  $t_i$  ainsi que les déformations plastiques  $\underline{\varepsilon}_i^{p(n)}$  (il dépend donc du pas d'itération). On obtient ainsi le vecteur déplacement  $\underline{U}^{(n)}$ , approximation de  $\underline{\xi}_i^{(n)}$ . En résumé, cette étape consiste à résoudre un problème *linéaire* mais *global* en espace.

**Min en  $\underline{\varepsilon}^p$ .** L'étape de minimisation par rapport à  $\underline{\varepsilon}^p$ , à  $\underline{\xi}$  fixé est un problème de minimisation *non linéaire*, mais il a l'avantage par rapport au précédent d'être *local* en espace. En effet,  $\underline{\xi}_i^{(n)}$  étant fixé et  $\underline{\varepsilon}^p$  n'intervenant pas par ses dérivées, on peut "localiser" la minimisation en chaque point de la structure, ce qui revient à résoudre le problème de minimisation

$$\min_{\underline{\varepsilon}^p} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^p : \underline{C} : \underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_i^{(n)} \underline{C} : \underline{\varepsilon}^p + \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p) \right\}.$$

Pour illustrer ce problème local de minimisation, plaçons nous dans le cas du modèle standard de Von Mises. La fonction d'appui  $\pi_{\mathbb{S}}$  est donnée par

$$\pi_{\mathbb{S}}(\underline{e}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_c \|\underline{e}\| & \text{si } \text{Tr } \underline{e} = 0 \\ +\infty & \text{si } \text{Tr } \underline{e} \neq 0 \end{cases}.$$

Nous n'avons donc qu'à envisager des  $\underline{\varepsilon}^p$  de trace nulle. Le problème local de minimisation devient alors

$$\min_{\underline{\varepsilon}^p : \text{Tr } \underline{\varepsilon}^p = 0} \left\{ \mu \underline{\varepsilon}^p : \underline{\varepsilon}^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_c \|\underline{\varepsilon}^p - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p\| - 2\mu \underline{\varepsilon}_i^{(n)} : \underline{\varepsilon}^p \right\},$$

où  $\underline{e}_i^{(n)}$  est le déviateur de  $\underline{\varepsilon}_i^{(n)}$  et  $\|\underline{e}\| = \sqrt{\underline{e} : \underline{e}}$ . Notons  $f(\underline{\varepsilon}^p)$  le terme entre accolades qu'il s'agit de minimiser ;  $f$  est une fonction strictement convexe de  $\underline{\varepsilon}^p$  qui est dérivable partout sauf en  $\underline{\varepsilon}_{i-1}^p$ . Etant à croissance quadratique, le minimum existe et du fait de la stricte convexité est unique. On a *a priori* deux possibilités :

1. Soit le minimum est atteint en  $\underline{\varepsilon}_{i-1}^p$  ;
2. Soit le minimum est atteint ailleurs, auquel cas il est atteint en un point  $\underline{\varepsilon}^p$  où la dérivée de  $f$  s'annule.

Pour trouver dans quelle situation on se trouve, posons  $\underline{\sigma}_i^{(n)*} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\varepsilon}_i^{(n)} - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p)$  dont le déviateur est  $\underline{s}_i^{(n)*} = 2\mu(\underline{e}_i^{(n)} - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p)$ . On montre alors que

1. Si  $\|\underline{s}_i^{(n)*}\| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c$ , alors le minimum est atteint en  $\underline{\varepsilon}_{i-1}^p$ .
2. Si  $\|\underline{s}_i^{(n)*}\| > \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c$ , alors le minimum est atteint en un point où la dérivée de  $f$  est nulle.

En effet, posons  $\underline{\varepsilon}^p = \underline{\varepsilon}_{i-1}^p + \underline{e}$ , il vient

$$f(\underline{\varepsilon}^p) = f(\underline{\varepsilon}_{i-1}^p) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c \|\underline{e}\| - \underline{s}_i^{(n)*} : \underline{e} + \mu \underline{e} : \underline{e}.$$

Comme  $\underline{s}_i^{(n)*} : \underline{e} \leq \|\underline{s}_i^{(n)*}\| \|\underline{e}\|$ , si  $\|\underline{s}_i^{(n)*}\| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c$ , alors  $f(\underline{\varepsilon}^p) \geq f(\underline{\varepsilon}_{i-1}^p) + \mu \underline{e} : \underline{e}$  et donc le minimum est atteint en  $\underline{\varepsilon}_{i-1}^p$ .

Par contre, si  $\|\underline{s}_i^{(n)*}\| > \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c$ , alors le minimum est atteint ailleurs. En effet, choisissons  $\underline{e} = h \underline{s}_i^{(n)*} / \|\underline{s}_i^{(n)*}\|$  avec  $h > 0$ . On obtient

$$f(\underline{\varepsilon}^p) = f(\underline{\varepsilon}_{i-1}^p) + h \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c - h \|\underline{s}_i^{(n)*}\| + \mu h^2.$$

Par conséquent pour  $h$  assez petit, on a  $f(\underline{\varepsilon}^p) < f(\underline{\varepsilon}_{i-1}^p)$ . Le minimum est atteint ailleurs qu'en  $\underline{\varepsilon}_{i-1}^p$  et donc en un point où la dérivée de  $f$  s'annule. Donc, dans ce cas, on a

$$2\mu(\underline{e}_i^{(n)} - \underline{\varepsilon}_i^{p(n+1)}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c \frac{\underline{\varepsilon}_i^{p(n+1)} - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p}{\|\underline{\varepsilon}_i^{p(n+1)} - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p\|}.$$

Si l'on pose  $\underline{\sigma}_i^{(n)} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\varepsilon}_i^{(n)} - \underline{\varepsilon}_i^{p(n+1)})$ , le membre de gauche représente son déviateur  $\underline{s}_i^{(n)}$ . En prenant sa norme, on voit donc que  $\|\underline{s}_i^{(n)}\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c$ , autrement dit  $\underline{\sigma}_i^{(n)}$  est au seuil de plasticité. Mais on a aussi  $\underline{s}_i^{(n)} = \underline{s}_i^{(n)*} - 2\mu(\underline{\varepsilon}_i^{p(n+1)} - \underline{\varepsilon}_{i-1}^p)$  et par conséquent  $\underline{s}_i^{(n)}$  et  $\underline{s}_i^{(n)*}$  sont colinéaires (et de même sens). D'où

$$\underline{s}_i^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c \frac{\underline{s}_i^{(n)*}}{\|\underline{s}_i^{(n)*}\|} \quad (6.27)$$

et donc  $\underline{\sigma}_i^{(n)}$  est la projection de  $\underline{\sigma}_i^{(n)*}$  sur le convexe  $\mathbb{S}$  de Von Mises.

Résumons cette étape de minimisation de l'énergie par rapport à  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  à  $\underline{\underline{\xi}}$  fixé. Pour calculer  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n+1)}$ , on procède comme suit :

1. On calcule  $\underline{\underline{s}}_i^{(n)*} = 2\mu(\underline{\underline{e}}_i^{(n)} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p)$  ;
2. Si  $\|\underline{\underline{s}}_i^{(n)*}\| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c$ , alors  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n+1)} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p$  ;
3. Si  $\|\underline{\underline{s}}_i^{(n)*}\| > \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c$ , alors  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n+1)} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{i-1}^p + \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_c}{\|\underline{\underline{s}}_i^{(n)*}\|}\right) \frac{\underline{\underline{s}}_i^{(n)*}}{2\mu}$ .

En d'autres termes, c'est un algorithme de type *prédiction élastique – correction plastique* : 1. On calcule les contraintes à partir des déformations calculées à l'étape précédente et les déformations plastiques du pas de temps  $i - 1$  (prédiction élastique) ; 2. Si elles sont dans le domaine élastique, on les garde et on prend pour déformation plastique celles du pas de temps  $i - 1$  (pas de correction) ; 3. Si elles sont à l'extérieur du domaine élastique, on les projette sur le seuil de plasticité et on modifie les déformations plastiques en conséquence (correction plastique).

Revenons à l'algorithme de minimisation alterné. C'est un *algorithme de descente*, à chaque itération l'énergie de la structure décroît. En effet, on a

$$\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i^{(n)}, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n)}) \leq \mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i^{(n-1)}, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n)})$$

puisque  $\underline{\underline{\xi}}_i^{(n-1)}$  est admissible et que  $\underline{\underline{\xi}}_i^{(n)}$  minimise  $\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n)})$  par rapport à  $\underline{\underline{\xi}}$ . De plus

$$\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i^{(n)}, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n+1)}) \leq \mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i^{(n)}, \underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n)})$$

puisque  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n)}$  est admissible et que  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^{p(n+1)}$  minimise  $\mathcal{E}_i(\underline{\underline{\xi}}_i^{(n)}, \underline{\underline{\varepsilon}})$  par rapport à  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ .

La convergence de l'algorithme est assujettie en particulier au fait que le chargement est supportable par la structure.

## 6.5 Cas standard avec écoulement cinématique linéaire

Certaines propriétés dégagées précédemment sont spécifiques à la plasticité parfaite et disparaissent lorsque le matériau est écoulementable. C'est en particulier le cas pour tout ce qui concerne les résultats mathématiques d'existence, d'unicité et de régularité des solutions. Mais c'est vrai aussi pour le concept de charge limite qui est attaché à celui de bornitude des contraintes : *si le matériau peut supporter n'importe quel niveau de contrainte, alors la structure peut supporter n'importe quel niveau de chargement*. Par contre, d'autres propriétés subsistent. Il en est ainsi pour les concepts de charge limites élastiques, d'écoulement structurel et de contraintes résiduelles. Nous nous proposons ici de l'illustrer dans le cas particulier de modèles standards avec écoulement cinématique linéaire.

Ces modèles sont basés sur les notions de *contrainte interne*  $\underline{\underline{X}}$  et de *contrainte effective*  $\underline{\underline{Y}}$  qui sont définies par

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}} \quad (6.28)$$

où  $\underline{\underline{H}}$  est le tenseur d'écoulement (tenseur du quatrième ordre supposé défini positif). La contrainte effective doit rester dans un convexe fixe  $\mathbb{S}$  de  $\mathbb{M}_s^3$  et l'évolution de la déformation plastique est toujours régie par la règle de normalité. Autrement dit, on suppose que l'inégalité de Hill reste vraie, mais à condition de l'exprimer en termes de la contrainte effective, *i.e.*

$$\underline{\underline{Y}} \in \mathbb{S}, \quad (\underline{\underline{Y}} - \underline{\underline{Y}}^*) : \underline{\underline{\varepsilon}}^p \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{Y}}^* \in \mathbb{S}. \quad (6.29)$$

### 6.5.1 Unicité de la réponse

Établissons un résultat général d'unicité de l'évolution pour de tels matériaux.

**Résultat d'unicité de l'évolution.** *Dans le cas de structures constituées de matériaux élasto-plastiques standards avec écoulement cinématique linéaire, le problème d'évolution admet au plus une solution (tant du point de vue des contraintes que des déplacements et des déformations plastiques).*

Il ne s'agit que d'un résultat d'unicité mais, contrairement au cas de la plasticité parfaite, on pourrait aussi obtenir un résultat d'existence : il n'existe plus de charges limites car les contraintes ne sont pas bornées. Toutefois la preuve de l'existence nécessite des outils mathématiques qui sortent du cadre de ce cours. Ici aussi, le caractère standard joue un rôle essentiel dans la démonstration d'unicité.

PREUVE. Envisageons deux solutions  $(\xi, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \underline{\underline{\sigma}})$  et  $(\xi^*, \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}, \underline{\underline{\sigma}}^*)$  du problème d'évolution présenté dans la Section 6.1.1 en remplaçant la loi d'écoulement (6.5) par (6.29). Le début de la démonstration est le même que celui utilisé pour montrer l'unicité des contraintes dans le cas parfaitement plastique. On arrive ainsi à

$$0 = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) d\Omega. \quad (6.30)$$

Grâce à la nouvelle inégalité de Hill (6.29), on a à la fois

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{Y}} - \underline{\underline{Y}}^*) : \underline{\underline{\varepsilon}}^p d\Omega \geq 0, \quad \int_{\Omega} (\underline{\underline{Y}}^* - \underline{\underline{Y}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*} d\Omega \geq 0.$$

En additionnant ces deux inégalités on obtient

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) d\Omega \geq \int_{\Omega} (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) : \underline{\underline{H}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) d\Omega.$$

En reportant dans (6.30), il vient

$$0 \geq \int_{\Omega} \left( (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^*) + (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) : \underline{\underline{H}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) \right) d\Omega$$

On reconnaît dans le second membre une dérivée par rapport au temps, *i.e.*

$$0 \geq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) : \underline{\underline{H}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) \right) d\Omega$$

qui doit être vraie à chaque instant. En intégrant en temps entre 0 et  $t$  et en tenant compte de la condition initiale (6.1), on obtient à l'instant  $t$

$$0 \geq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) : \underline{\underline{H}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}) \right) d\Omega.$$

Mais comme le tenseur de souplesse et le tenseur d'écouissage sont définis positifs, ce n'est possible que si  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^*$  et  $\underline{\varepsilon}^p = \underline{\varepsilon}^{p*}$  à l'instant  $t$ . Comme  $t$  est arbitraire, on a donc unicité des contraintes et de la déformation plastique. Du fait de la relation contrainte-déformation, on a aussi unicité des déformations,  $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^*$ . Par conséquent  $\underline{\xi} = \underline{\xi}^*$  à un déplacement rigide près (qui est nul si le bord de la structure est suffisamment fixée).  $\square$

Le rôle de l'écouissage apparaît clairement dans la démonstration. Si  $\underline{\underline{H}}$  est nul, on perd l'unicité des déformations plastiques.

### 6.5.2 L'exemple de la torsion élasto-plastique d'un arbre cylindrique

Calculons l'évolution d'un arbre cylindrique sous torsion pour un tel matériau et comparons la avec celle d'un matériau parfaitement plastique pour voir les effets de l'écouissage. Comme le matériau est isotrope et la déformation plastique est incompressible, le tenseur d'écouissage est proportionnel à l'identité,

$$\underline{\underline{H}} = H \underline{\underline{I}}, \quad H > 0.$$

Du fait de l'unicité de la réponse et des symétries du problème, il est naturel de chercher la solution sous la forme

$$\underline{\xi} = tr \frac{z}{L} \underline{e}_\theta, \quad \underline{\sigma} = \tau(r, t) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta), \quad \underline{\varepsilon}^p = \gamma^p(r, t) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta).$$

L'évolution du cisaillement  $\tau$  et de la déformation plastique  $\gamma^p$  est régie par

$$\tau = 2\mu \left( \frac{tr}{2L} - \gamma^p \right), \quad |\tau - H\gamma^p| \leq \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}, \quad \begin{cases} \dot{\gamma}^p = 0 & \text{si } |\tau - H\gamma^p| < \sigma_c/\sqrt{3} \\ \dot{\gamma}^p \geq 0 & \text{si } \tau - H\gamma^p = +\sigma_c/\sqrt{3} \\ \dot{\gamma}^p \leq 0 & \text{si } \tau - H\gamma^p = -\sigma_c/\sqrt{3} \end{cases} \quad (6.31)$$

avec la condition initiale  $\gamma^p(r, 0) = 0$ . À  $r$  fixé, on reconnaît là le problème d'évolution du modèle ressort-patin-ressort avec  $H$  comme raideur du deuxième ressort. On peut donc utiliser les résultats du chapitre précédent. Le point matériel reste élastique tant que  $t \leq \alpha_e(r)$  (la même valeur que pour le modèle sans écouissage) et plastifie dès que  $t > \alpha_e(r)$ . L'évolution du cisaillement et de la déformation plastique est donnée par

$$\text{Si } tr \leq \frac{\sigma_c L}{\mu\sqrt{3}} : \begin{cases} \tau = \frac{tr\mu}{L} \\ \gamma^p = 0 \end{cases} ; \quad \text{Si } tr > \frac{\sigma_c L}{\mu\sqrt{3}} : \begin{cases} \tau = \frac{\mu H}{2\mu + H} \frac{tr}{L} + \frac{2\mu}{2\mu + H} \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \\ \gamma^p = \frac{\mu}{2\mu + H} \frac{tr}{L} - \frac{\sigma_c}{(2\mu + H)\sqrt{3}} \end{cases} \quad (6.32)$$

On notera que le front de la zone plastique est en  $r = R_e(\alpha)$ , comme pour un matériau non écouissable. Par contre, le cisaillement augmente linéairement avec  $t$  une fois que le seuil de plasticité du fait de l'écouissage. En termes de la réponse globale couple de torsion-angle de torsion, on obtient (cf

Figure 6.7)

$$M = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha_e} M_e & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \alpha_e \\ \left( \frac{4}{3} - \frac{\alpha_e^3}{3\alpha^3} + \frac{H\alpha}{2\mu\alpha_e} \right) \frac{2\mu}{2\mu + H} M_e & \text{si } \alpha > \alpha_e \end{cases} \quad (6.33)$$

Conclusion : On notera le double effet d'écrouissage : l'*écrouissage structurel* dû à la pénétration progressive de la zone plastique à l'intérieur du cylindre et l'*écrouissage matériel* dû au paramètre  $H$ . Du fait de l'écrouissage matériel, *il n'y a plus de charge limite* mais un comportement "limite" correspondant à un comportement élastique linéaire avec pour module de cisaillement effectif  $\mu H / (2\mu + H)$ . Du fait de l'écrouissage structurel, la structure tend asymptotiquement vers ce comportement limite sans jamais l'atteindre, à cause de la présence d'un noyau élastique.

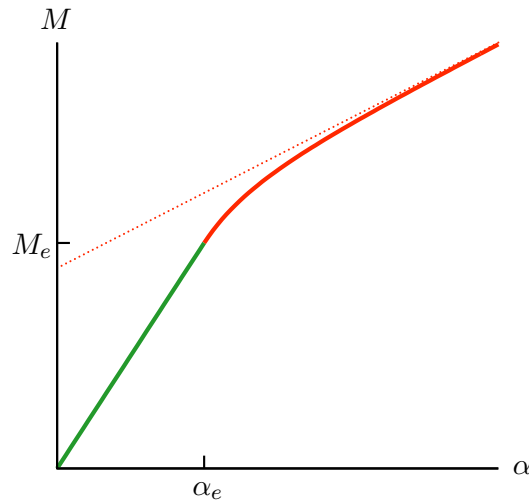


FIGURE 6.7 – Réponse globale de l'arbre plein sous torsion dans le cas d'un écrouissage cinématique linéaire.

Troisième partie

Rupture





## Chapitre 7

# Les bases de la Rupture Fragile

Dans ce chapitre on introduit les concepts de base de la Mécanique de la Rupture Fragile. Comme dans ce cadre le comportement des matériaux est supposé purement élastique et que la pointe des fissures est un point anguleux, on commence par l'étude des singularités élastiques aux points anguleux. On passe ensuite à la modélisation géométrique et mécanique des fissures en adoptant le point de vue macroscopique de Griffith. Les fissures étant idéalisées géométriquement comme des coupures dans le milieu sain, elles deviennent des surfaces de discontinuité des déplacements du point de vue cinématique. En termes d'interaction entre les lèvres, le point de vue de Griffith consiste à négliger les forces de cohésion. Toutefois, il peut y avoir des efforts de contact quand la fissure est fermée et la condition de non-interpénétration introduit une non linéarité qui se traduit par une dissymétrie de comportement entre traction et compression. On applique ensuite les résultats relatifs aux calculs de singularités au cas des fissures en milieu isotrope. Cela fait apparaître trois modes singuliers dits modes d'ouverture, de glissement et de déchirure auxquels sont attachés trois coefficients (un par mode) appelés facteurs d'intensité des contraintes qui sont des quantités globales. On donne quelques exemples de valeur des facteurs d'intensité des contraintes dans des cas de géométrie et de chargement simples. Le chapitre s'achève par l'introduction de la ténacité, paramètre matériau qui est à la base du critère de propagation d'Irwin.

## 7.1 Les singularités en élasticité

### 7.1.1 La question des singularités

Les équations de l'élasticité sont telles qu'elles peuvent admettre des solutions singulières au sens où les contraintes peuvent être infinies en certains points particuliers de la structure (plus exactement, les contraintes peuvent être non bornées car en général les points "singuliers" ne font pas partie de la structure). C'est le cas en certains points anguleux de la frontière, en certains points à l'interface de plusieurs matériaux ou en des points de la frontière où les conditions aux limites changent. Ce phénomène n'est pas spécifique à l'élasticité linéaire, il est présent aussi en élasticité non linéaire. On peut donc considérer que c'est une anomalie à mettre au débit de la théorie de l'élasticité, car les "matériaux réels" ne supportent pas des contraintes infinies. Notons cependant que la théorie de la plasticité n'est pas exempte de toute critique de ce point de vue, car les critères de Von Mises ou de Tresca (et de façon générale toutes les lois standards avec incompressibilité plastique) tolèrent aussi les contraintes sphériques infinies. Le plus souvent, cette présence de singularité est due également à une schématisation "excessive" de la géométrie ou du chargement : il suffit d'émousser les angles, d'"épaissir" les interfaces ou de lisser les changements de conditions aux limites pour que ces singularités disparaissent et que les contraintes redeviennent bornées.

On serait donc tenté de dire que, d'un point de vue pratique, l'étude des singularités ne présente aucun intérêt. De plus, la présence de singularités est gênante d'un point de vue théorique, car elle oblige à faire un peu attention à ce que l'on écrit, certaines formules d'intégration par parties ou de dérivation ne sont plus valables. Enfin elle est aussi gênante sur le plan numérique car ces singularités viennent polluer en général la précision et les résultats. Alors pourquoi ne pas s'en débarrasser ? La raison, d'apparence paradoxale, pour laquelle on garde et on étudie ces singularités est que *ce concept théorique permet d'appréhender plus facilement la réalité*. Cette affirmation est à rapprocher de ce que l'on fait en mécanique des fluides pour traiter les ondes de choc ou en mécanique des structures pour rendre compte des phénomènes de flambement. Dans le cas des fluides, les ondes de choc vues comme des surfaces de discontinuités mobiles du champ des vitesses sont des concepts purement théoriques puisque leur existence repose sur l'hypothèse du fluide parfait. L'introduction de la viscosité (réalité intangible) dans la modélisation rend impossible la présence de discontinuités de vitesses. Pourtant, bien des phénomènes acoustiques se comprennent mieux et se modélisent plus facilement à partir du modèle idéalisé de fluide parfait que celui plus réaliste de fluide visqueux. De même, le flambement d'une poutre sous l'effet d'une compression longitudinale vu comme un phénomène d'instabilité et de bifurcation de position d'équilibre suppose que la poutre est parfaitement rectiligne. L'introduction d'inévitables imperfections géométriques rompt la symétrie et fait disparaître le point de bifurcation. La poutre fléchit progressivement sous l'effet de la compression. Pourtant, c'est le modèle géométrique sans imperfection qui permet de mieux appréhender le phénomène et d'estimer pour quelles valeurs du chargement la déflexion va devenir importante. Le rôle des singularités en élasticité tient de ces deux exemples : en simplifiant à la fois le modèle de comportement et la géométrie, on va avoir accès plus facilement à certaines quantités physiques essentielles pour comprendre la propagation des fissures.

### 7.1.2 La méthode de recherche des singularités

Nous nous plaçons dans le cadre de **l'élasticité linéaire isotrope, en petites transformations et en quasi-statique**. Passons en revue quelques exemples de singularités en indiquant comment on

les calcule. Les premiers exemples sont en élasticité anti-planes, les suivants en élasticité plane. (Les singularités en 3D s'obtiendront comme une combinaison de celles obtenues en déformation plane et déformation anti-plane.) Dans chaque exemple, on adopte un système de coordonnées polaires de pôle le point singulier et les déplacements se mettent sous la forme

$$\underline{\xi} = \sum_{i=1}^N K_i r^{\alpha_i} \underline{U}^i(\theta) + \dots \quad (7.1)$$

les trois points indiquant des termes plus réguliers. La partie singulière est donc toujours en  $r^\alpha$ , le coefficient  $\alpha$  représentant la *puissance de la singularité*<sup>1</sup>. Les champs de vecteurs  $\underline{U}^i$  représentent la dépendance angulaire de la singularité, ils sont en général normalisés. Les coefficients  $\alpha_i$  et les fonctions angulaires  $\underline{U}^i(\theta)$  ne dépendent que des caractéristiques **locales** du matériau, de la géométrie et du chargement. Le nombre  $N$  de fonctions singulières est une caractéristique locale. Dans tous les cas que nous rencontrons par la suite,  $N$  se limite à 1 ou 2. Les coefficients  $K_i$  sont des grandeurs **globales**. Ils dépendent de l'ensemble de la géométrie, du comportement et du chargement de la structure étudiée. Ils restent donc indéterminés à la fin de notre construction des fonctions singulières. On les appelle *Facteurs d'Intensité des Contraintes*.

On déduit de la loi d'élasticité que les contraintes se mettent sous la forme

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^N K_i r^{\alpha_i-1} \underline{S}^i(\theta) + \dots$$

On voit donc qu'elles sont effectivement singulières, *i.e.* tendent vers l'infini lorsque  $r$  tend vers 0, seulement si  $\alpha_i < 1$ . D'autre part, pour que les champs  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\sigma}$  soient effectivement les solutions d'un problème d'élasticité linéaire, il faut que l'énergie élastique soit finie. Comme la densité volumique d'énergie élastique vaut  $\frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}$ , au voisinage du point singulier celle associée au mode  $i$  est en  $r^{2(\alpha_i-1)}$ . L'élément de volume étant  $r dr d\theta dz$ , son énergie élastique est en  $r^{2\alpha_i-1} dr d\theta dz$ . Pour que l'énergie soit finie, il faut donc que  $r^{2\alpha_i-1}$  soit intégrable au voisinage de 0 et donc que  $\alpha_i > 0$ . Par conséquent

La puissance  $\alpha_i$  de la singularité est à chercher entre 0 et 1.

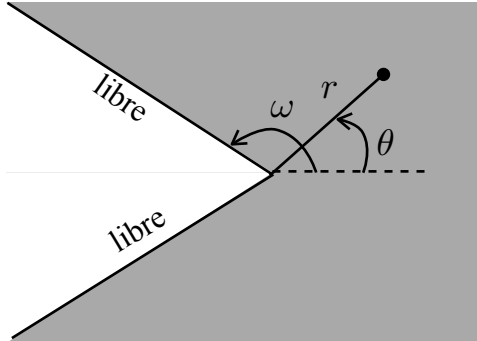
### 7.1.3 Exemples de singularités en élasticité anti-plane

Rappelons que l'élasticité anti-plane correspond à la situation où les déplacements sont de la forme  $\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_3(x_1, x_2) \underline{e}_3$ , cf Section 2.2.2. En se plaçant en coordonnées cylindriques, on a donc  $\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_z(r, \theta) \underline{e}_z$  et les contraintes sont alors de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mu \frac{\partial \xi_z}{\partial r}(r, \theta) (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta}(r, \theta) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta).$$

---

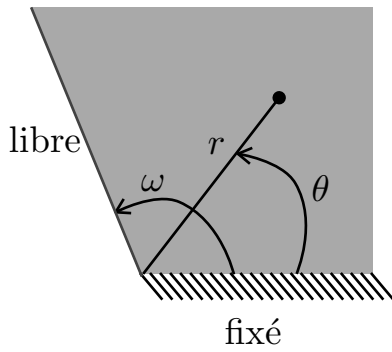
1. On fera attention au fait que plus la puissance de la singularité est élevée, moins la singularité est forte.



Coin avec bords libres

$$\frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi$$

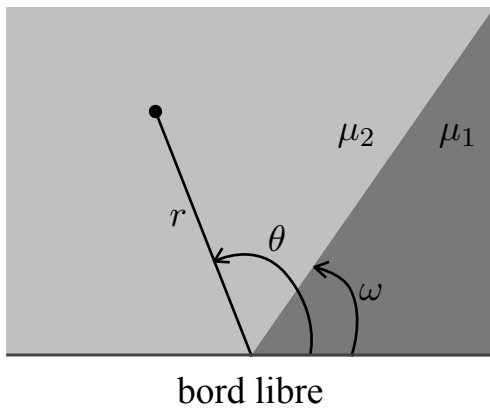
$$\xi_z = K r^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin \frac{\pi}{2\omega} \theta + \dots$$



Changement de conditions aux limites

$$\frac{\pi}{2} < \omega < 2\pi$$

$$\xi_z = K r^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin \frac{\pi}{2\omega} \theta + \dots$$



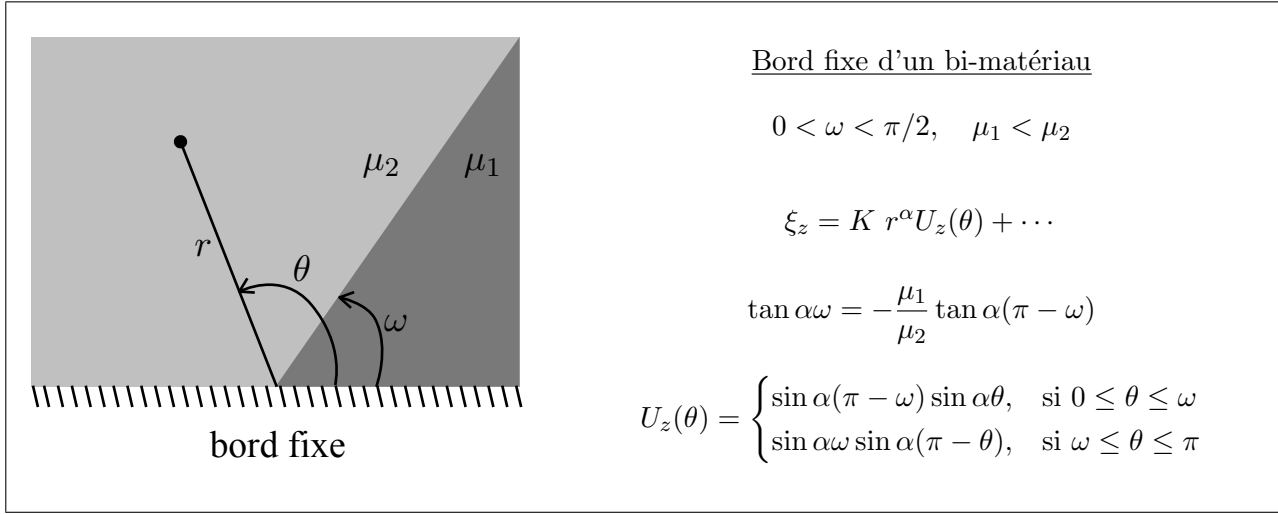
Bord libre d'un bi-matériau

$$0 < \omega < \pi/2, \quad \mu_1 > \mu_2$$

$$\xi_z = K r^\alpha U_z(\theta) + \dots$$

$$\tan \alpha \omega = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \alpha(\pi - \omega)$$

$$U_z(\theta) = \begin{cases} \cos \alpha(\pi - \omega) \cos \alpha \theta, & \text{si } 0 \leq \theta \leq \omega \\ \cos \alpha \omega \cos \alpha(\pi - \theta), & \text{si } \omega \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$



Etablissons la forme des singularités annoncées en supposant *a priori* qu'elles sont de la forme (7.1)<sup>2</sup>. Considérons le cas d'un **coin avec bords libres**. Le milieu étant homogène, isotrope et les déplacements étant anti-plans, les équations d'équilibre se réduisent à

$$\mu \Delta \xi_z + f_z = 0.$$

Les bords  $\theta = \pm\omega$  étant libres, les conditions aux limites s'écrivent  $\sigma_{\theta z} = 0$ , *i.e.*

$$\mu \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pm\omega} = 0.$$

Injectons la forme (7.1) de  $\xi$  dans les équations d'équilibre, le terme le plus singulier de  $\Delta \xi_z$  est en  $r^{\alpha-2}$  avec  $\alpha < 1$ . Si l'on suppose que les forces volumiques sont régulières au voisinage de  $r = 0$ , le terme le plus singulier de  $\Delta \xi_z$  doit s'annuler et l'on en déduit que la (ou les) fonctions angulaires doivent vérifier

$$\alpha^2 U_z(\theta) + U_z''(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in (-\omega, +\omega).$$

Par conséquent  $U_z(\theta) = A \sin(\alpha\theta) + B \cos(\alpha\theta)$ . Les conditions aux limites exigent que  $U_z'(\pm\omega) = 0$ , d'où

$$A \cos(\alpha\omega) = B \sin(\alpha\omega) = 0.$$

On ne peut avoir  $A = B = 0$  car sinon on aurait  $U_z = 0$  et on cherche évidemment une solution non triviale. On a donc, soit  $\cos(\alpha\omega) = 0$ , soit  $\sin(\alpha\omega) = 0$ . Mais comme  $\alpha$  doit être entre 0 et 1 et que  $\omega \leq \pi$ , la seule possibilité est  $\cos(\alpha\omega) = 0$ . D'où la puissance de la singularité

$$\alpha = \frac{\pi}{2\omega}$$

et pour que  $\alpha$  soit inférieur à 1, il faut que  $\omega > \pi/2$ . (Sinon, si  $\omega \leq \pi/2$ , il n'existe pas de singularité.) On en déduit que  $B = 0$  et  $A$  reste arbitraire. On a donc bien la forme de la singularité annoncée (avec  $K = A$ ).

---

2. Démontrer que les singularités sont nécessairement de la forme (7.1) est un problème mathématique difficile qui nécessite des notions avancées d'Analyse Fonctionnelle. L'ouvrage de référence reste celui de Grisvard [15].

**Exercice 7.1.** Montrer que la forme de la singularité reste inchangée si l'on suppose que les bords ne sont pas libres mais sont soumis à des forces surfaciques,  $T_z = T_z^\pm(r)$  en  $\theta = \pm\omega$ , dans la mesure où ces forces surfaciques ne sont pas singulières.

Le cas d'un **changement de conditions aux limites** se traite de façon similaire. Indiquons simplement les points qui diffèrent. Les équations d'équilibre fournissent la même forme de  $U_z$ . Les conditions aux limites s'écrivent maintenant  $\mu U'_z(\omega) = 0$  et  $U_z(0) = 0$ . D'où  $B = 0$  et  $A \cos(\alpha\omega) = 0$ .  $A$  ne devant pas être nul, il faut donc que  $\cos(\alpha\omega) = 0$ . Notons que  $\omega$  peut varier maintenant entre 0 et  $2\pi$ , contrairement au cas précédent où il était entre 0 et  $\pi$ . Pour qu'il existe une solution singulière, il faut que  $\omega > \pi/2$ . Si  $\pi/2 < \omega \leq 3\pi/2$ , alors  $\alpha = \pi/2\omega$  et on retrouve les résultats du cas précédent. Si  $3\pi/2 < \omega \leq 2\pi$ , alors il existe deux valeurs possibles pour  $\alpha$  :  $\alpha = \pi/2\omega$  ou  $\alpha = 3\pi/2\omega$ . La première correspond à une singularité plus forte, mais les deux peuvent coexister. En ne retenant que le terme le plus singulier, on obtient la forme annoncée.

Considérons le cas du **bord libre d'un bi-matériau**. On suppose que le bord est rectiligne et qu'il est incliné d'un angle  $\omega$  par rapport à l'interface entre les deux matériaux supposée elle-même rectiligne<sup>3</sup>. On peut toujours supposer que  $\omega$  est entre 0 et  $\pi/2$ . On verra que dans le cas où  $\omega = \pi/2$ , *i.e.* quand l'interface est orthogonal au bord libre, il n'y a pas de singularité. De même, on verra qu'il y a une singularité uniquement si les deux modules de cisaillement sont différents et si le matériau le plus raide est du côté de l'angle aigu, *i.e.* seulement si  $\mu_1 > \mu_2$ . En injectant la forme (7.1) de  $\xi$  dans les équations d'équilibre, écrites séparément dans chaque matériau, on obtient que  $U_z''(\theta) + \alpha^2 U_z(\theta) = 0$  dans chaque intervalle ouvert  $(0, \omega)$  et  $(\omega, \pi)$ <sup>4</sup>. En intégrant séparément, on obtient

$$U_z(\theta) = \begin{cases} A_1 \cos \alpha\theta + B_1 \sin \alpha\theta, & \text{si } 0 < \theta < \omega \\ A_2 \cos \alpha\theta + B_2 \sin \alpha\theta, & \text{si } \omega < \theta < \pi \end{cases}$$

Les conditions aux limites de bord libre s'écrivent  $U'_z(0) = U'_z(\omega) = 0$  et donnent

$$B_1 = 0, \quad B_2 \cos \alpha\pi = A_2 \sin \alpha\pi.$$

Il reste à écrire la continuité des déplacements et du vecteur contrainte à l'interface. Elles s'écrivent  $\llbracket U_z \rrbracket(\omega) = 0$  et  $\llbracket \mu U'_z \rrbracket(\omega) = 0$  et donnent

$$\begin{aligned} A_1 \cos \alpha\omega &= A_2 \cos \alpha\omega + B_2 \sin \alpha\omega \\ \mu_1 A_1 \sin \alpha\omega &= \mu_2 A_2 \sin \alpha\omega - \mu_2 B_2 \cos \alpha\omega. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un système linéaire homogène en les trois coefficients  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B_2$ . Comme on cherche une solution non triviale, il faut que le déterminant soit nul, ce qui nous fournit l'équation en  $\alpha$  :

$$\tan \alpha\omega = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \alpha(\pi - \omega).$$

3. Ces hypothèses de rectitude du bord et des interfaces ne sont pas vraiment restrictives dans la mesure où cette notion de singularité est locale. Tous les résultats s'appliquent encore si le bord et l'interface sont des courbes régulières.

4. On suppose *a priori* que la puissance  $\alpha$  est la même dans les deux matériaux. Cela peut se déduire de la continuité des déplacements à l'interface.

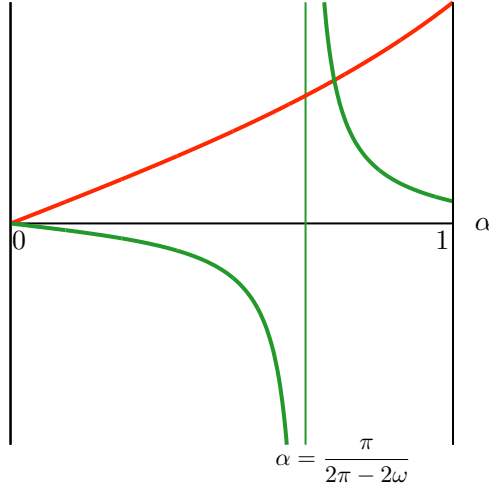


FIGURE 7.1– Détermination graphique de la puissance  $\alpha$  de la singularité sur le bord libre d'un bi-matériau. En rouge, le graphe de la fonction  $\alpha \mapsto \tan \alpha \omega$ ; en vert, le graphe de la fonction  $\alpha \mapsto -\frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \alpha(\pi - \omega)$  avec son asymptote en  $\alpha = \frac{\pi}{2\pi - 2\omega}$ . Les valeurs numériques correspondent au cas où  $\mu_1 = 10\mu_2$  et  $\omega = \pi/4$ .

On voit que si  $\omega = \pi/2$ , alors elle se réduit à  $\tan(\alpha\pi/2) = 0$  qui n'a pas de solution entre 0 et 1. Il n'y donc pas de singularité dans ce cas. Quand  $0 < \omega < \pi/2$ , la fonction  $\alpha \mapsto \tan \alpha \omega$  croît strictement de 0 à  $\tan \alpha \pi$  quand  $\alpha$  croît de 0 à 1. La fonction  $\alpha \mapsto -\frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \alpha(\pi - \omega)$  est d'abord négative et décroissante quand  $\alpha$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2\pi - 2\omega}$ . Puis elle décroît strictement de  $+\infty$  jusqu'à  $\mu_2 \tan \alpha \omega$  quand  $\alpha$  croît jusqu'à 1. Par conséquent, il existe une et une seule solution pour  $\alpha$  comprise entre 0 et 1 pourvu que  $\mu_1 > \mu_2$ . Cette valeur est en fait comprise entre  $\frac{\pi}{2\pi - 2\omega}$  et 1. On peut l'obtenir graphiquement, cf Figure 7.1. Une fois la puissance de la singularité déterminée, on obtient la fonction angulaire  $U_z$  à un coefficient multiplicatif près qui correspond au Facteur d'Intensité des Contraintes et qui est une grandeur globale.

Le cas où le bord est **fixe** est laissé à titre d'exercice. Notons les différences par rapport au bord libre. Il y a singularité si le matériau est plus souple du côté de l'angle aigu. L'équation en  $\alpha$  est la même en permutant  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . La fonction angulaire est différente pour que les conditions aux limites soient respectées.

**Exercice 7.2.** Calculer la puissance de la singularité et la fonction angulaire au voisinage du bord fixe d'un bi-matériau.

#### 7.1.4 Exemple de singularités en élasticité plane.

Tous les cas traités précédemment dans le cadre anti-plan peuvent se traiter en élasticité plane (déformations planes ou contraintes planes). En dehors du fait que les calculs sont sensiblement plus lourds, il existe quelques différences qualitatives qu'il est important de noter. De façon générale, l'existence d'une singularité est plus fréquente en élasticité plane. Par exemple, on a vu que dans le cas d'un bi-matériau dont l'interface est perpendiculaire au bord libre, il n'y a pas de singularités



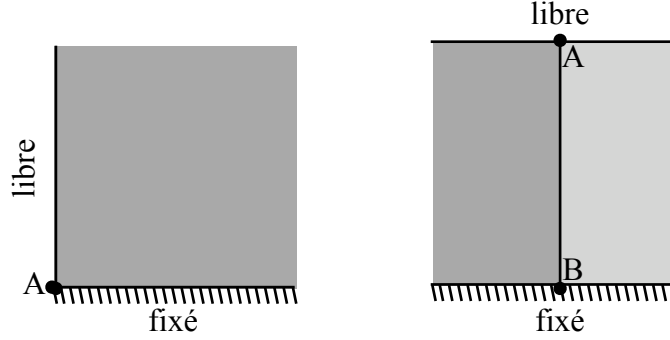


FIGURE 7.2 – Exemple de points singuliers en élasticité plane : à gauche, le point  $A$  à l'angle droit d'un changement de type de conditions aux limites ; à droite, les points  $A$  et  $B$ , à l'interface de deux matériaux et sur un bord libre ou un bord fixé. De tels points ne seraient pas singuliers en élasticité anti-plane.

anti-planes. Par contre, il existe dans ce cas une singularité en élasticité plane. C'est aussi le cas à l'angle droit d'un bord encastré et d'un bord libre, alors que l'on a vu qu'il n'en existe pas dans le cas anti-plan (cf le deuxième cas où  $\alpha = 1$  si  $\omega = \pi/2$ ). Dans ces deux cas, cf Figure 7.2, le coefficient de Poisson joue un rôle important et, en général, la puissance de la singularité en dépend.

Compte tenu de la lourdeur des calculs, nous nous contenterons de traiter le cas d'une **entaille avec bords libres**, Figure 7.3. Il suffit pour montrer des différences avec l'élasticité anti-plane et il a en outre l'avantage de nous préparer à l'étude des singularités en pointe de fissure puisque ce sera le cas particulier où  $\omega = \pi$ . Nous nous plaçons en *déformations planes*, les déplacements sont de la forme

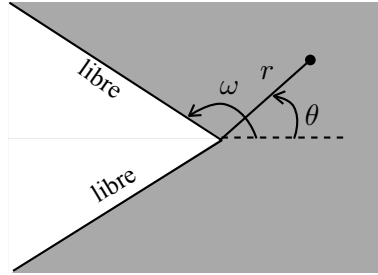


FIGURE 7.3 – Entaille d'angle  $2\pi - 2\omega$  à bords libres.

$\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_r(r, \theta)\underline{e}_r + \xi_\theta(r, \theta)\underline{e}_\theta$  en coordonnées cylindriques. Le calcul des singularités est plus simple en passant par les fonctions d'Airy et les équations de compatibilité. Comme on ne s'intéresse qu'à la partie singulière des contraintes, on peut négliger les forces volumiques et les équations d'équilibre se réduisent à

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0.$$

Elles sont automatiquement satisfaites au voisinage du coin si l'on introduit la fonction d'Airy  $\Psi$  :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

ce qui se traduit en coordonnées cylindriques par

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \quad (7.2)$$

Comme  $\varepsilon_{33} = 0$ , les relations déformations-contraintes donnent  $\sigma_{33} = \nu \Delta \Psi$  et

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{11} &= (1 - \nu^2)\Psi_{,22} - \nu(1 + \nu)\Psi_{,11}, \\ E\varepsilon_{22} &= (1 - \nu^2)\Psi_{,11} - \nu(1 + \nu)\Psi_{,22}, \\ E\varepsilon_{12} &= -(1 + \nu)\Psi_{,12}. \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation de compatibilité  $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$ , on obtient que  $\Psi$  doit être bi-harmonique :  $\Delta^2 \Psi = 0$ . Le vecteur contrainte est nul sur les bords libres du coin, d'où

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right|_{\theta=\pm\omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right|_{\theta=\pm\omega} = 0.$$

Comme on cherche des contraintes singulières en  $r^{\alpha-1}$ , la fonction d'Airy doit être en  $r^{\alpha+1}$  et on la cherche donc sous la forme

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{i=1}^N K_i r^{\alpha+1} F^i(\theta) + \dots$$

Pour qu'elle soit bi-harmonique, il faut que chaque fonction angulaire  $F$  vérifie

$$F^{(4)}(\theta) + ((1 + \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2)F''(\theta) + (1 + \alpha)^2(1 - \alpha)^2 F(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in (-\omega, +\omega).$$

La solution générale est

$$F(\theta) = A \cos(1 + \alpha)\theta + B \sin(1 + \alpha)\theta + C \cos(1 - \alpha)\theta + D \sin(1 - \alpha)\theta$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont quatre réels arbitraires. Les conditions aux limites de bord libre s'écrivant  $F(\pm\omega) = F'(\pm\omega) = 0$  donnent les deux systèmes linéaires homogènes suivants en  $A$  et  $C$  d'une part, et,  $B$  et  $D$  d'autre part :

$$\begin{pmatrix} \cos(1 + \alpha)\omega & \cos(1 - \alpha)\omega \\ (1 + \alpha)\sin(1 + \alpha)\omega & (1 - \alpha)\sin(1 - \alpha)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sin(1 + \alpha)\omega & \sin(1 - \alpha)\omega \\ (1 + \alpha)\cos(1 + \alpha)\omega & (1 - \alpha)\cos(1 - \alpha)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour que la solution soit non triviale, il faut donc qu'au moins un des deux déterminants soit nul ce qui fournit l'équation de la puissance de la singularité

$$\boxed{\sin(2\alpha\omega) + \alpha \sin(2\omega) = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sin(2\alpha\omega) - \alpha \sin(2\omega) = 0}.$$

La résolution peut se faire graphiquement en étudiant les variations de la fonction  $g : \alpha \mapsto \sin 2\alpha\omega/\alpha$  et en cherchant si elle peut prendre les valeurs  $\pm \sin 2\omega$  entre 0 et 1. On peut distinguer différents cas suivant l'angle de l'entaille, cf Figure 7.3. Intervient dans les raisonnements la valeur particulière  $\omega^* \approx 2.2467$  telle que  $\text{tg } 2\omega^* = 2\omega^*$ .

1. *Angle sortant* :  $0 < \omega < \pi/2$ . La fonction  $g$  est strictement décroissante de  $2\omega$  à  $\sin 2\omega > 0$  et il n'existe donc aucune solution. *Les "entailles" à angle sortant ne sont pas singulières.*
2. *Angle plat* :  $\omega = \pi/2$ . Dans ce cas  $\sin 2\omega = -\sin 2\omega = 0$ . La fonction  $g$  est strictement décroissante de  $2\omega$  à 0 et il n'existe donc aucune solution. *Les "entailles" à angle plat ne sont pas singulières.* Mais c'est un cas limite.
3. *Angle "ouvert"* :  $\pi/2 < \omega < \omega^*$ . Dans ce cas  $-\sin 2\omega > 0 > \sin 2\omega$ . La fonction  $g$  est strictement décroissante de  $2\omega$  à  $\sin 2\omega < 0$ . Il existe donc une et une seule solution. *Les "entailles" à angle ouvert sont singulières.*
4. *Angle "critique"* :  $\omega = \omega^*$ . La fonction  $g$  est toujours strictement décroissante de  $2\omega$  à  $\sin 2\omega < 0$ , mais sa dérivée en  $\alpha = 1$  est nulle. Il existe une et une seule solution, mais c'est un cas limite.
5. *Angle "fermé"* :  $\omega^* < \omega < \pi$ . La fonction  $g$  est d'abord décroissante puis croissante. Son graphe coupe une fois les deux droites  $\pm \sin 2\omega$ . Il existe donc deux solutions. Toutefois, elles sont différentes et la plus forte singularité (*i.e.* la puissance la plus faible) correspond à la solution de  $g(\alpha) = -\sin 2\omega$ .
6. *Fissure* :  $\omega = \pi$ . Dans ce cas  $\sin 2\omega = -\sin 2\omega = 0$ . La fonction passe par 0 en  $\boxed{\alpha = 1/2}$ . C'est une *racine double*.

Excluons le cas  $\omega = \pi$  que nous étudierons dans la prochaine section. Quand elle existe, la singularité la plus forte  $\alpha_1$  est donnée par l'équation  $\boxed{\sin 2\alpha_1\omega = -\alpha_1 \sin 2\omega}$ . La singularité est simple, les coefficients  $B$  et  $D$  sont nuls, alors que les coefficients  $A$  et  $C$  sont liés par la relation

$$A(1 + \alpha_1) \sin(1 + \alpha_1)\omega + C(1 - \alpha_1) \sin(1 - \alpha_1)\omega = 0.$$

La fonction angulaire  $F^1$  est *paire* et peut s'écrire (à un facteur multiplicatif près que l'on fixe par normalisation)

$$\boxed{F^1(\theta) \sim (1 - \alpha_1) \sin(1 - \alpha_1)\omega \cos(1 + \alpha_1)\theta - (1 + \alpha_1) \sin(1 + \alpha_1)\omega \cos(1 - \alpha_1)\theta.}$$

Quand elle existe, la singularité la plus faible  $\alpha_2$  est donnée par l'équation  $\boxed{\sin 2\alpha_2\omega = \alpha_2 \sin 2\omega}$ . La singularité est simple, les coefficients  $A$  et  $C$  sont nuls, alors que les coefficients  $B$  et  $D$  sont liés par la relation

$$B \sin(1 + \alpha_2)\omega + D \sin(1 - \alpha_2)\omega = 0.$$

La fonction angulaire  $F^2$  est *impaire* et peut s'écrire

$$\boxed{F^2(\theta) \sim \sin(1 - \alpha_2)\omega \sin(1 + \alpha_2)\theta - \sin(1 + \alpha_2)\omega \sin(1 - \alpha_2)\theta.}$$

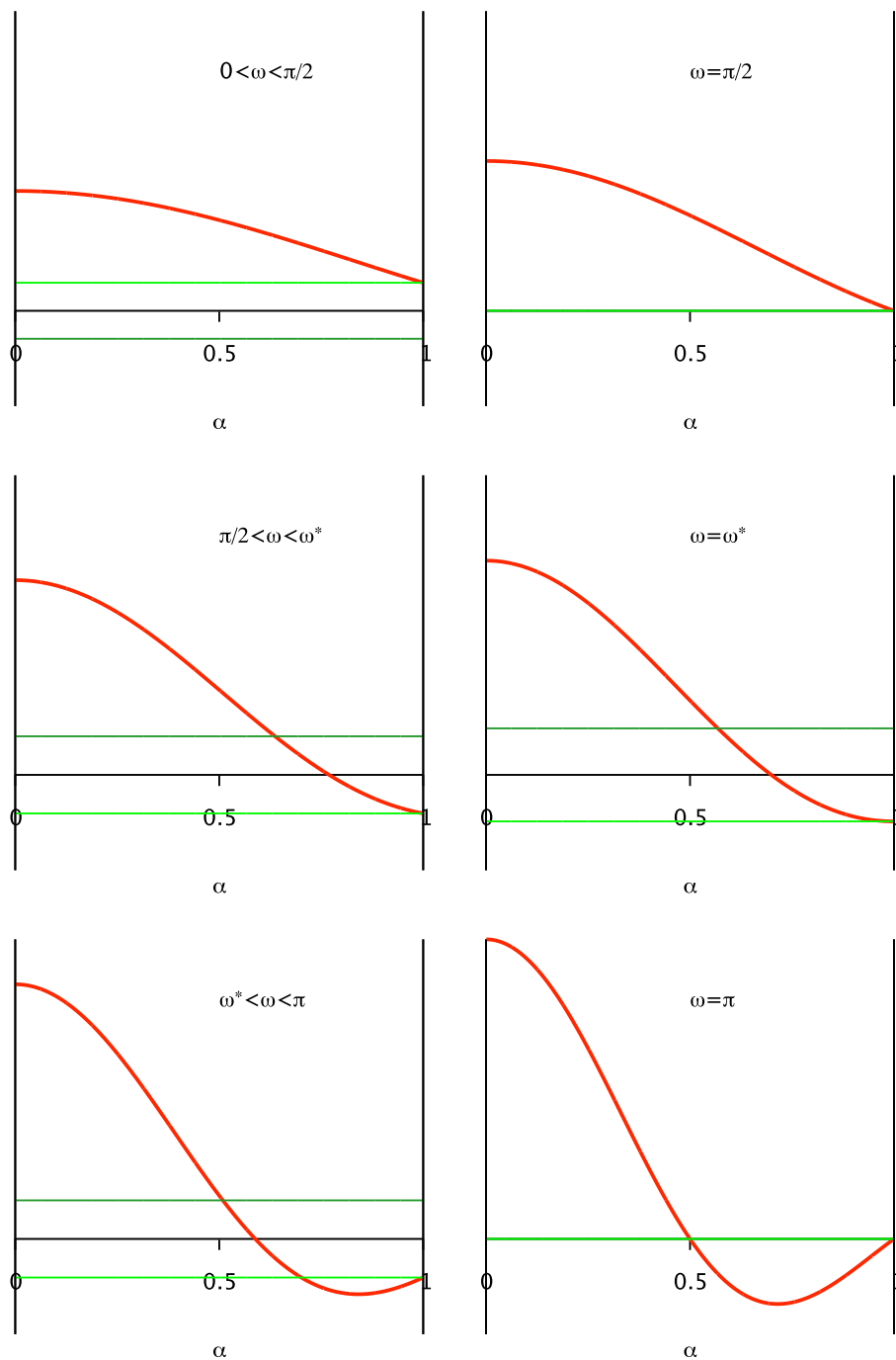


FIGURE 7.4 – Détermination graphique de la puissance de la singularité pour différentes valeurs de l'angle d'entaille. En rouge : le graphe de  $\alpha \mapsto \sin 2\alpha\omega/\alpha$  ; en vert clair :  $\sin 2\omega$  ; en vert foncé :  $-\sin 2\omega$ .

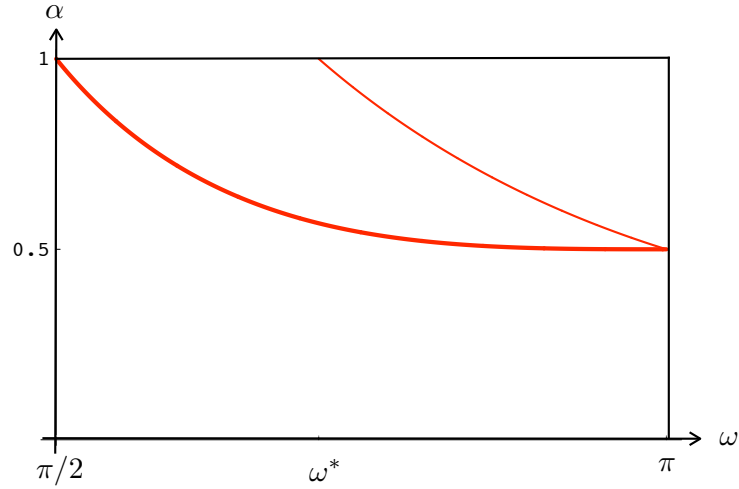


FIGURE 7.5 – Variation de la puissance des singularités avec l’angle de l’entaille. En rouge épais, la singularité la plus forte qui existe quand  $\omega > \pi/2$ ; en rouge mince, la singularité la plus faible qui existe quand  $\omega > \omega^*$ .

## 7.2 Le cadre d’hypothèses de la rupture fragile

### 7.2.1 La description géométrique des fissures

On se place au niveau macroscopique et on idéalise les fissures comme des “coupures” dans le milieu. La conséquence directe est que ces coupures sont des surfaces de discontinuité des déplacements<sup>5</sup>. Précisons cette notion de surface de discontinuité en commençant par un exemple. Plaçons-nous en 2D et considérons les deux cas suivants, cf Figure 7.6 :

1. La configuration de référence  $\Omega$  est le disque  $\mathbb{D}$  de centre  $(0,0)$  et de rayon  $R$ , *i.e.*  $\Omega = \mathbb{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ .
2. La configuration de référence  $\Omega$  est le disque  $\mathbb{D}$  privé du segment  $\Gamma = (-R, 0) \times \{0\}$ , *i.e.*  $\Omega = \mathbb{D} \setminus \Gamma$ .

Cet exemple a un caractère générique. Le disque  $\mathbb{D}$  représente le milieu “sain” et  $\Gamma$  la fissure. Dans le premier cas, si l’on suppose que le comportement du matériau constitutif du disque est élastique, le champ des déplacements à l’équilibre sous l’effet, par exemple, d’une traction radiale uniforme sur le bord est simplement de la forme  $\underline{\xi}(\underline{x}) = k\underline{x}$ . Il est régulier dans  $\mathbb{D}$ . De façon générale, quel que soit le chargement envisagé, il faut que les déplacements soient réguliers pour que l’énergie élastique reste finie. Ils sont nécessairement continus<sup>6</sup> à travers toute courbe tracée dans  $\mathbb{D}$ .

Dans le deuxième cas, l’ouvert est le disque privé d’un segment. Envisageons par exemple le champ de déplacements suivant

$$\underline{\xi}(x) = -2k\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \underline{e}_\theta$$

5. En 3D les fissures sont effectivement des *surfaces* alors qu’en 2D ce sont des *courbes* où les déplacements peuvent être discontinus.

6. De façon précise, pour que l’énergie soit finie il faut que les déplacements soient dans l’espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  et par conséquent qu’il y ait continuité des traces sur toute surface incluse dans  $\Omega$ .

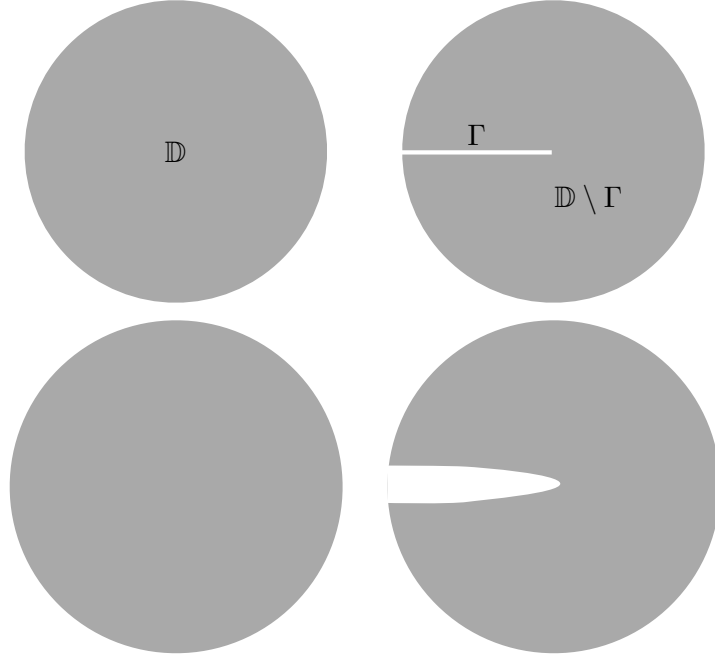


FIGURE 7.6 – Le disque “non fissuré”  $\mathbb{D}$  et le disque “fissuré”  $\mathbb{D} \setminus \Gamma$  dans leur configuration de référence et leur configuration déformée. On voit qu’en général les déplacements sont discontinus sur la fissure, prenant des valeurs distinctes sur chacune des lèvres.

où  $(r, \theta)$  désignent les coordonnées polaires du point  $\underline{x}$  et  $k$  est un réel positif donné. Les déformations associées sont

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{k}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{k}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r).$$

Elles sont parfaitement définies dans l’ouvert  $\mathbb{D} \setminus \Gamma$  même si elles tendent vers l’infini lorsque  $r$  tend vers 0. Malgré cette singularité en 0, il est facile de vérifier, en calculant  $\int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega$ , que l’énergie élastique est finie. On peut noter que les déplacements sont discontinus à travers  $\Gamma$ . En effet

$$[[\underline{\xi}]](x) = \lim_{y \downarrow 0} \underline{\xi}(x, y) - \lim_{y \uparrow 0} \underline{\xi}(x, y) = 4k\sqrt{|x|} \underline{e}_2.$$

Ce champ de déplacement est cinématiquement admissible dans le cas du disque privé du segment. Par contre dans le cas du disque entier, il ne l’est pas. En effet, du fait de sa discontinuité sur le segment  $\Gamma$  qui est intérieur à  $\mathbb{D}$  et donc à  $\Omega$ , les déformations sont des mesures de Dirac sur  $\Gamma$ . Elles ne sont donc pas de carré intégrables et l’énergie élastique n’est pas finie.

Revenons au cas général. Dans un milieu continu de dimension  $n$  on veut décrire les fissures comme des objets géométriques de dimension  $n-1$  qui peuvent se trouver à l’intérieur ou sur le bord du milieu. (Il est nécessaire d’étendre ces notions à la frontière du domaine, car il est très fréquent de voir des fissures se développer sur les parties du bord où les déplacements sont bloqués provoquant la séparation progressive ou brutale de l’objet de son support.) Dans le milieu sain, les déplacements ne sont pas

autorisés à être discontinus, par contre dans le milieu fissuré ils sont autorisés à être discontinus à travers la fissure. Plus précisément, considérons un point géométrique  $\underline{x}$  sur la fissure.

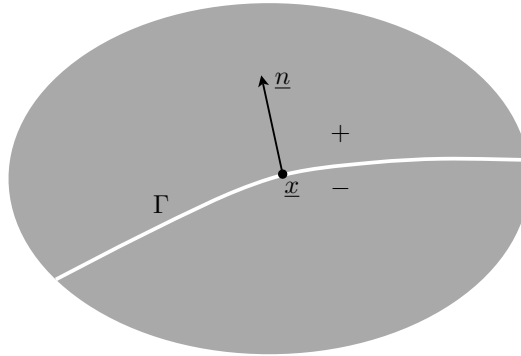


FIGURE 7.7 – Orientation locale de la fissure

Si l'on suppose que la fissure est une surface régulière au voisinage du point  $\underline{x}$  de façon à pouvoir y définir un plan tangent, on peut se servir de la normale  $\underline{n}$  au plan tangent pour définir localement les faces  $+$  et  $-$  de la fissure<sup>7</sup>. Un champ de déplacement  $\underline{\xi}$  admet une trace  $\underline{\xi}^+$  en  $\underline{x}$  lorsqu'on approche  $\underline{x}$  en venant du côté  $+$  et une trace  $\underline{\xi}^-$  en  $\underline{x}$  lorsqu'on approche  $\underline{x}$  en venant du côté  $-$ . *A priori* ces deux traces sont différentes, ce que l'on traduit en disant que  $\underline{\xi}$  est discontinu en  $\underline{x}$ . Le saut de déplacement  $\llbracket \underline{\xi} \rrbracket$  est par définition donné par

$$\llbracket \underline{\xi} \rrbracket(\underline{x}) = \underline{\xi}^+(\underline{x}) - \underline{\xi}^-(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma.$$

Comme nous l'avons déjà signalé, les fissures peuvent se développer sur la frontière du domaine  $\Omega$ . Dans ce cas, il faut considérer que tout champ de déplacement cinématiquement admissible  $\underline{\xi}$  admet une *limite intérieure*  $\underline{\xi}^-$  et une *limite extérieure*  $\underline{\xi}^+$  de part et d'autre du bord fissuré en orientant cette fissure de bord à l'aide de la normale extérieure  $\underline{n}$  au domaine.

### 7.2.2 Les conditions aux limites sur les lèvres des fissures

Les fissures une fois qu'elles sont apparues doivent être considérées comme faisant partie de la frontière du domaine fissuré, même si elles sont intérieures au domaine sain. Toutefois, dans l'écriture des conditions aux limites, il est bon de distinguer les fissures qui sont au bord du domaine sain de celles qui sont intérieures au domaine sain.

#### Fissures intérieures

Dans la théorie de la rupture fragile, on néglige les *forces de cohésion* entre les lèvres des fissures. Ceci est évidemment une approximation. Si l'on descend à l'échelle atomique et si l'on considère les potentiels d'interaction atomiques du type Lennard-Jones, les forces d'attraction inter-atomiques

7. On a deux possibilités pour définir  $\underline{n}$ . Toutes deux sont licites. Mais le choix qui est fait conditionne l'orientation des faces.

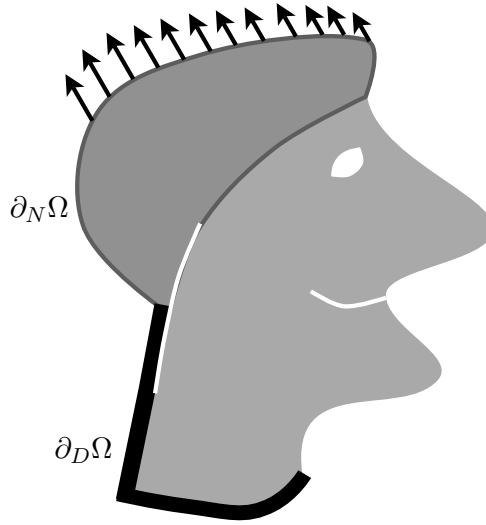


FIGURE 7.8 – Objet contenant deux fissures dont une est intérieure (mais débouchante), l'autre est partiellement intérieure (mais d'interface) et partiellement sur un bord à déplacement contrôlé.

décroissent rapidement avec la distance entre atomes mais sans jamais véritablement s'annuler. En les négligeant, on va se trouver confronté à une série de conséquences contestables sur le plan physique, mais qui permettent de modéliser à moindre frais une partie des phénomènes observés.

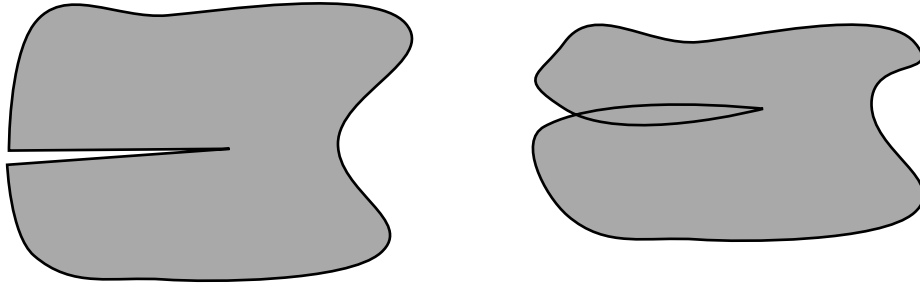


FIGURE 7.9 – A droite, interpénétration physiquement interdite

Même s'il n'y a pas de forces de cohésion, il peut néanmoins exister des *forces de contact* entre les lèvres des fissures. C'est le cas lorsqu'on exerce des efforts qui ont tendance à déplacer les lèvres dans le sens d'une interpénétration des volumes de part et d'autre de la fissure. Comme cette interpénétration est physiquement impossible, les lèvres restent en contact mais elles interagissent l'une sur l'autre par des forces de compression. Ceci signifie que les conditions aux limites sur les lèvres des fissures doivent être nécessairement basées sur les conditions de contact et de non interpénétration. On peut donc distinguer deux situations :

1. *Les lèvres ne sont pas en contact.* En petits déplacements, cette condition se traduit par le fait que le déplacement normal de la lèvre supérieure est supérieur au déplacement normal de la lèvre inférieure. En termes de la discontinuité du déplacement, cela signifie que le saut de



déplacement normal est positif. Dans ce cas, il n'y a pas d'interaction entre les lèvres, ce qui se traduit par le fait que le vecteur contrainte est nul<sup>8</sup> :

$$\boxed{\text{Condition de non contact et non cohésion : si } \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{n} > 0, \text{ alors } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0}.} \quad (7.3)$$

2. *Les lèvres sont en contact.* Dans ce cas, il y a des forces de contact entre les lèvres<sup>9</sup>. Toutefois ces forces dépendent des lois de frottement. En l'absence de frottement, les forces de contact sont purement normales (et nécessairement de compression), les cisaillements sont nuls. Dans le cas d'un contact "parfait", il ne peut y avoir de discontinuité tangentielle du déplacement. En pratique, la vérité est quelque part entre les deux. Par exemple, si l'on adopte une loi de frottement de Coulomb, la discontinuité tangentielle du déplacement dépend du rapport entre la contrainte tangentielle de contact et la contrainte normale. Par la suite, pour simplifier la présentation, nous négligerons les forces de frottement et nous adopterons donc la

$$\boxed{\text{Condition de contact sans frottement : si } \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0, \text{ alors } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_{nn} \underline{n}, \sigma_{nn} \leq 0.} \quad (7.4)$$

On peut remarquer que les conditions de non cohésion et de contact sans frottement peuvent se regrouper en

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_{nn} \underline{n}, \quad \sigma_{nn} \leq 0, \quad \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{n} \geq 0, \quad \sigma_{nn} \llbracket \underline{\xi} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \cap \Gamma.}$$

## Fissures sur les bords à déplacements contrôlés

Si une fissure apparaît sur un bord où on impose des conditions aux limites de type Dirichlet, ces conditions devront s'écrire en termes de la limite extérieure du fait de la discontinuité possible des déplacements. On écrira donc

$$\underline{\xi}^+ = \underline{\xi}^d \quad \text{sur} \quad \partial_D \Omega \cap \Gamma. \quad (7.5)$$

Mais évidemment cela ne suffit pas, car il faut aussi s'assurer des conditions de contact et de non interpénétration des lèvres. En négligeant les forces de frottement, on écrira donc aussi (7.3) et (7.4) sur  $\partial_D \Omega \cap \Gamma$ .

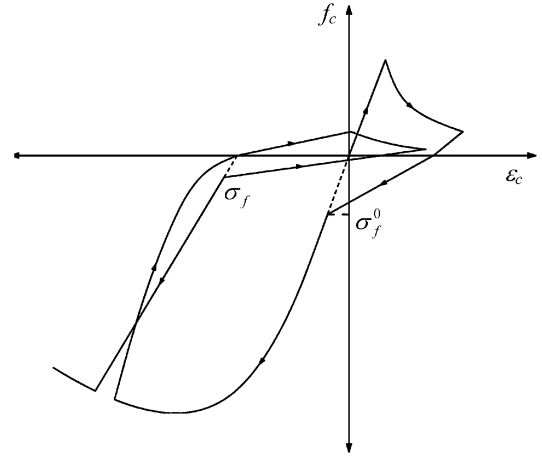
Nous n'envisagerons pas de fissures sur les bords à forces contrôlées pour simplifier la présentation.

---

8. On peut rencontrer en pratique des cas où les lèvres de la fissure sont soumises à des forces bien que la fissure soit ouverte. C'est le cas d'une fissure débouchante dans un fluide. Le fluide exerce une pression sur les lèvres.

9. Pour des raisons d'équilibre ou de façon équivalente en vertu du principe de l'action et de la réaction, le vecteur contrainte  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  est continu sur les lèvres de la fissure. Il n'y a donc pas lieu de distinguer  $\underline{\underline{\sigma}}^+ \cdot \underline{n}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^- \cdot \underline{n}$ . Par contre, le tenseur des contraintes n'est pas forcément continu.

**Remarque.** La prise en compte du contact entre les lèvres est essentielle si l'on veut interpréter correctement certains essais expérimentaux. Ainsi, si l'on analyse un essai uniaxial de traction-compression d'une éprouvette de béton, on constate un comportement fortement différent en traction et en compression. De plus si après une phase de traction, on décharge l'éprouvette puis on la comprime, ce que l'on observe ne s'explique qu'en considérant une refermeture progressive des fissures et un blocage des lèvres après contact, cf la figure ci-contre.



### 7.2.3 Le cadre quasistatique de l'élasticité linéaire

La deuxième grande hypothèse simplificatrice est relative au comportement. On suppose que les matériaux constitutifs ont un comportement élastique et, comme on se place dans le cadre des petites perturbations, que la relation contrainte-déformation est linéaire<sup>10</sup> :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}.$$

Cette hypothèse a, comme on le verra, des conséquences très importantes. En particulier, cela conduit à la présence de singularités sur le front de fissure, les contraintes tendant vers l'infini lorsqu'on se rapproche du front. Ceci tient à la fois à l'hypothèse géométrique qui consiste à modéliser la fissure comme une "coupure" et à l'hypothèse de comportement élastique qui ne borne pas les contraintes.

La dernière hypothèse simplificatrice consiste à négliger les effets d'inertie et à se placer en quasistatique. C'est évidemment une approximation. En effet, on s'intéresse à l'évolution de la fissuration dans un objet soumis à un chargement dépendant du temps. La variation du chargement s'accompagne d'un mouvement des points matériels qui ne peuvent revenir à l'équilibre que grâce à des frottements internes de type visqueux. Comme on se place en élasticité, on néglige cet amortissement ce qui rend théoriquement le retour à l'équilibre impossible. Toutefois si le chargement est appliqué suffisamment lentement, on peut admettre (et on peut sous certaines conditions démontrer) que les effets inertiels sont négligeables (en particulier l'énergie cinétique) et raisonner en statique. Cela revient à supposer qu'à chaque instant, l'objet est en équilibre dans son état de fissuration et sous le chargement actuels. Cette hypothèse simplificatrice a le grand mérite de rendre le problème d'évolution de la fissuration facilement traitable dans bien des cas. On sera toutefois amené à rediscuter et à critiquer cette hypothèse dans des situations où la propagation des fissures est "instable".

Muni de ces hypothèses, on va pouvoir déterminer à chaque instant le champ de déplacement à l'équilibre en fonction de l'état de fissuration et du chargement. De façon précise, plaçons-nous

10. On pourra être amené dans certains cas à supposer l'existence de pré-contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^0$ . C'est par exemple le cas lorsqu'on s'intéresse à la propagation de fissures sous chargement thermique, cf chapitre 1. On supposera toujours que  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  est une donnée (pouvant varier dans le temps) et on indiquera à l'occasion les changements à apporter du fait de la présence de ces termes supplémentaires dans la relation de comportement.

en dimension  $n$  et supposons connu l'état de fissuration  $\Gamma$  de l'objet et considérons un chargement caractérisé par la donnée des déplacements  $\underline{\xi}^d$  sur la partie du bord  $\partial_D\Omega$ , des forces volumiques  $\underline{f}$  dans  $\Omega$  et des forces surfaciques  $\underline{T}$  sur la partie complémentaire du bord  $\partial_N\Omega$ <sup>11</sup>. Appelons  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\sigma}$  les champs des déplacements et des contraintes à l'équilibre. Ils ont à vérifier

$$\textbf{L'équilibre} : \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Gamma$$

$$\textbf{La relation d'élasticité} : \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad 2\underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla \underline{\xi} + \nabla \underline{\xi}^T \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Gamma$$

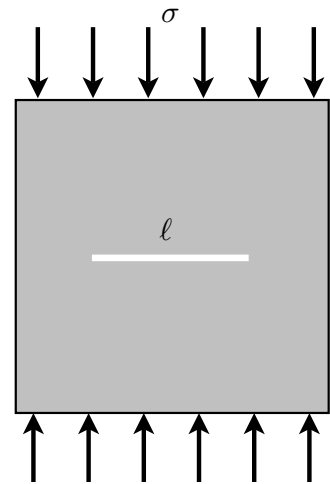
$$\textbf{Les conditions aux limites} : \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T} \quad \text{sur} \quad \partial_N\Omega, \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}^d \quad \text{sur} \quad \partial_D\Omega \setminus \Gamma$$

ainsi que les conditions aux limites (7.3)–(7.5) sur la fissure.

Evidemment, l'existence de l'équilibre n'est pas garantie. Si l'objet est “trop fissuré”, par exemple si la fissure le sépare en plusieurs morceaux, il se peut que du fait de la perte de cohésion certains morceaux ne puissent plus équilibrer les efforts extérieurs. Dans ce cas-là, on considérera l'objet comme rompu et l'analyse s'arrête. Un des objectifs de la théorie est justement de déterminer jusqu'à quel niveau de chargement l'objet est capable de résister. La caractérisation de l'existence ou non d'une solution à ce problème de statique est facilitée par l'écriture variationnelle du problème. En effet, il s'avère qu'on peut toujours utiliser le théorème de l'énergie potentielle comme le verrons dans le prochain chapitre.

**ASTUCE:** La condition de non-interpénétration des lèvres et le caractère unilatéral du contact compliquent l'analyse puisqu'ils rendent le problème non linéaire même si l'on se place en petits déplacements et en élasticité linéaire. En pratique, on commence par résoudre le problème de statique en prenant pour condition aux limites sur les lèvres des fissures la condition de non cohésion  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0}$  sans se préoccuper de la condition de non interpénétration que l'on vérifie *a posteriori*. Cela suffit dans bien des cas et évite de traiter le problème non linéaire. Mais évidemment quand on trouve une solution avec interpénétration, il faut revenir au problème non linéaire.

**Exercice 7.3.** On se place en 2D, déformations planes. On considère un domaine carré de côté  $a$  contenant en son centre une fissure de longueur  $\ell < a$ , parallèle à un côté. On exerce sur les côtés du carré parallèles à la fissure des forces normales de compression de densité uniforme  $\sigma \leq 0$ . Le matériau constitutif est linéairement élastique et isotrope. Montrer que la réponse du carré fissuré est la même que celle du carré sain. Montrer que si l'on exerce une traction  $\sigma > 0$ , alors la réponse du carré fissuré est forcément différente de celle du carré sain. (On n'essaiera pas de calculer exactement la réponse du carré fissuré dans le cas d'une traction.)



11. On peut évidemment considérer des chargements plus généraux, la démarche reste la même.

### 7.3 Les singularités en pointe de fissure

Plaçons-nous en 2D<sup>12</sup> et considérons une fissure  $\Gamma$  dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que

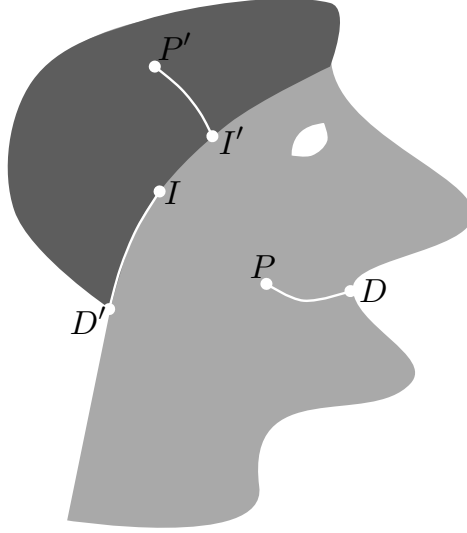


FIGURE 7.10 – Domaine bidimensionnel contenant trois fissures dont une d’interface et deux débouchantes au bord. Seules les pointes  $P$  et  $P'$  ont des singularités du type de celles étudiées dans cette section. Les pointes  $D$ ,  $D'$  qui sont débouchantes et les pointes  $I$  et  $I'$  qui sont sur une interface relèvent d’études spécifiques.

cette fissure est une courbe simple régulière telle que l’extrémité  $P$  soit à l’intérieur du domaine et que le matériau constitutif dans un voisinage de  $P$  soit élastique et isotrope. On exclut ainsi le cas d’une *fissure débouchante* sur le bord, d’une *fissure d’interface* entre deux matériaux ou d’une fissure terminant sur une hétérogénéité, cf Figure 7.10. Toutes ces situations nécessitent des traitements séparés.

Cette fissure est une “ligne” de discontinuité à travers laquelle les déplacements peuvent être discontinus. On suppose en outre qu’il n’y a pas d’interaction entre les lèvres de la fissure et donc que le vecteur contrainte doit être nul,

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma.} \quad (7.6)$$

Comme les singularités sont des notions locales, si l’on fait un zoom du domaine centré à la pointe  $P$  de la fissure, on se trouve dans la situation d’une entaille dont l’angle  $\omega$  vaut  $\pi$  et dont les bords sont libres. On adopte un système de coordonnées polaires de pôle  $P$  et dont l’angle polaire  $\theta$  est l’angle que fait le vecteur  $\underline{PM}$  avec la tangente  $\underline{t}$  à la fissure en  $P$ , cf Figure 7.11. On peut utiliser les résultats de la section 7.1.

12. Cette situation bidimensionnelle peut provenir d’une modélisation simplifiée ou d’une réduction de la dimension due à des propriétés de symétrie de la géométrie, du comportement et du chargement.

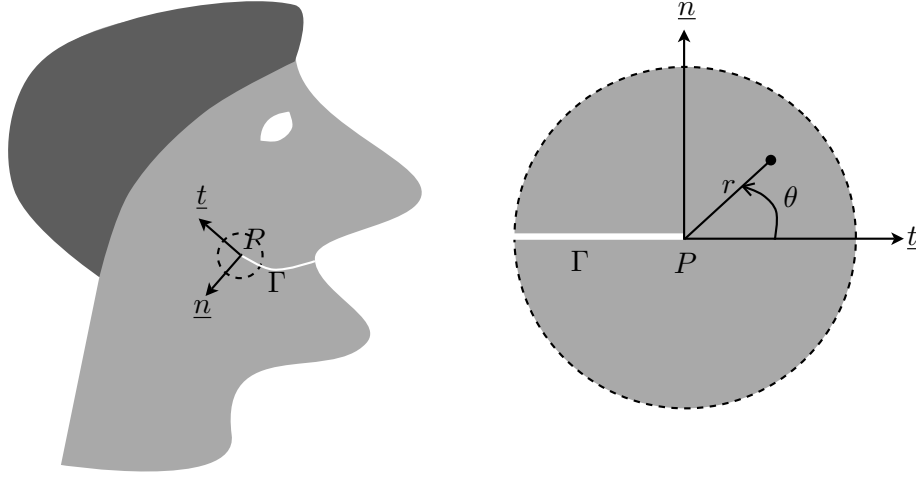


FIGURE 7.11 – Repère local en pointe de fissure.

### 7.3.1 En déformation plane

Il existe deux fonctions singulières, toutes deux avec la puissance  $1/2$ . En termes de la fonction d'Airy, la fonction angulaire de l'une est paire, celle de l'autre est impaire :

$$F^1(\theta) \sim \cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2}, \quad F^2(\theta) \sim \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}$$

On les normalise de façon à ce que les facteurs d'intensité des contraintes aient une interprétation simple. On aboutit finalement à la forme suivante

$$\Psi(r, \theta) = \frac{K_I}{3\sqrt{2\pi}} r^{\frac{3}{2}} \left( \cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{\frac{3}{2}} \left( \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

où  $K_I$  et  $K_{II}$  sont respectivement les facteurs d'intensité des contraintes des modes I et II. On déduit de (7.2) la forme de la singularité des contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( -\cos \frac{3\theta}{2} + 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3 \sin \frac{3\theta}{2} - 5 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \dots \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3 \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) + \dots \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3 \sin \frac{3\theta}{2} + 3 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme de la singularité des déplacements, il faut dans un premier temps calculer les déformations puis les intégrer. Sachant que les équations de compatibilité sont satisfaites (du fait que  $\Psi$  est bi-harmonique), on est assuré de pouvoir intégrer. De plus, comme  $\varepsilon_{rr} = \xi_{r,r}$  et que  $\xi_r \sim \sqrt{r}U_r(\theta)$ , on a  $U_r \sim 2\sqrt{r}\varepsilon_{rr}$ . De même, comme  $2r\varepsilon_{r\theta} = \xi_{r,\theta} + r^2(\xi_\theta/r)_{,r}$  et que  $\xi_\theta \sim \sqrt{r}U_\theta(\theta)$ , on a  $U_\theta \sim 2U'_r - 4\sqrt{r}\varepsilon_{r\theta}$ . D'où

$$\begin{aligned}\xi_r &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( -\cos \frac{3\theta}{2} + (5 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( 3 \sin \frac{3\theta}{2} - (5 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right) + \dots \\ \xi_\theta &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( \sin \frac{3\theta}{2} - (7 - 8\nu) \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( 3 \cos \frac{3\theta}{2} - (7 - 8\nu) \cos \frac{\theta}{2} \right) + \dots\end{aligned}$$

où on notera la présence du coefficient de Poisson.

Le saut des déplacements à travers les lèvres de la fissure est donné par  $[[\underline{\xi}]](r) = \underline{\xi}(r, +\pi) - \underline{\xi}(r, -\pi)$ . On peut le décomposer en saut tangentiel et saut normal

$$[[\underline{\xi}]] = [[\underline{\xi}]] \cdot \underline{t} \underline{t} + [[\underline{\xi}]] \cdot \underline{n} \underline{n}, \quad [[\underline{\xi}]] \cdot \underline{t} = -[[\xi_r]], \quad [[\underline{\xi}]] \cdot \underline{n} = -[[\xi_\theta]]$$

et on obtient

$$[[\underline{\xi}]] \cdot \underline{n} = 8(1 - \nu^2) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}, \quad [[\underline{\xi}]] \cdot \underline{t} = 8(1 - \nu^2) \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}.$$

On voit donc que le *mode I* correspond à une discontinuité purement normale, on l'appelle *mode d'ouverture*, alors que le *mode II* correspond à une discontinuité purement tangentielle, on l'appelle *mode de glissement*.

Notons que le saut de déplacement normal est non négatif si et seulement si  $K_I \geq 0$ . Comme un saut de déplacement normal négatif donnerait lieu à une *interpénétration* des lèvres des fissures au voisinage de la pointe, ce qui est physiquement impossible, la singularité de mode I n'est admissible que si  $K_I \geq 0$ . Si l'on re-examine comment on a calculé les singularités, on constate que l'on a supposé qu'il n'y avait pas d'interaction entre les lèvres (condition (7.6)). Ceci n'est vrai que dans la mesure où les lèvres ne sont pas en contact. Quand elles sont en contact, elles sont soumises à des forces surfaciques dont la composante normale est nécessairement une force de compression, donc négative. Réciproquement, si la pointe de la fissure est localement en compression, alors il n'y a pas d'ouverture normale de la fissure. Comme on a supposé que le contact se faisait sans frottement, il peut y avoir une discontinuité tangentielle. La fissure est alors en mode II pur.

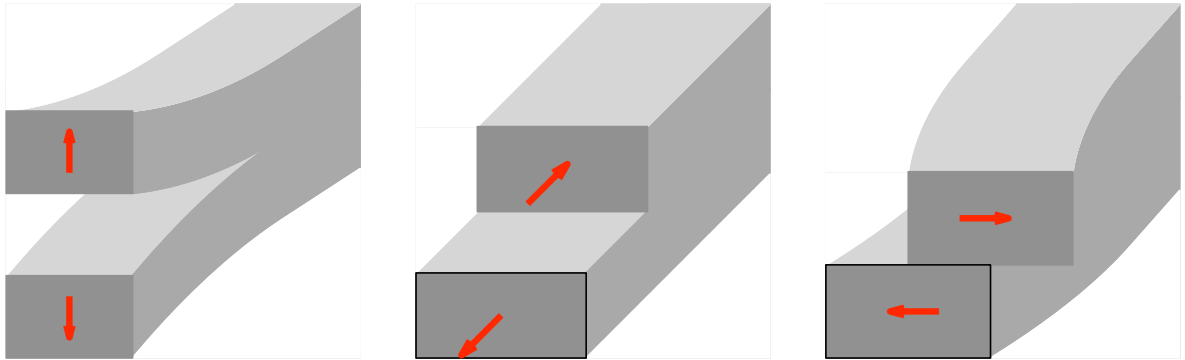


FIGURE 7.12 – Les trois modes singuliers : à gauche, le mode I ou mode d'ouverture ; au centre, le mode II ou mode de glissement ; à droite le mode III ou mode de déchirure.

### 7.3.2 En déformation anti-plane.

Il existe une seule fonction singulière, elle aussi avec la puissance  $1/2$ . Après normalisation de la fonction angulaire, le déplacement s'écrit

$$\xi_z = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots$$

où le facteur d'intensité des contraintes est noté  $K_{III}$ . Ce mode est appelé *mode III* ou *mode de déchirure*. La discontinuité sur les lèvres est évidemment purement tangentielle

$$[[\underline{\xi}]] \cdot \underline{e}_z = \frac{4K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}.$$

Les contraintes  $\sigma_{rz}$  et  $\sigma_{\theta z}$  sont données par

$$\sigma_{rz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \dots.$$

### 7.3.3 En 3D.

Considérons une fissure en 3D qui correspond à une surface de discontinuité  $\Gamma$  régulière dont le contour  $\gamma$  est lui-même supposé être une courbe régulière. Ce contour est appelé *front de fissure*. La solution d'un problème d'élasticité posé sur ce domaine fissuré est en général singulière le long du front. Bien que la théorie des singularités soit nettement moins avancée dans ce cadre 3D, il est généralement admis que les singularités en un point  $P$  du front est une combinaison des trois modes obtenus en déformation plane et déformation anti-plane dans la mesure où ce point est à l'intérieur du domaine et où le matériau constitutif dans un voisinage de  $P$  est élastique et isotrope.

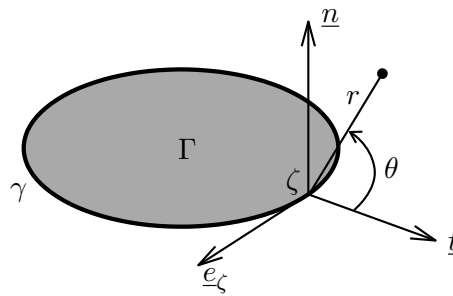


FIGURE 7.13 – Fissure en 3D :  $\Gamma$  est la surface de discontinuité,  $\gamma$  le front de fissuration,  $(\zeta, r, \theta)$  est le système de coordonnées curvilignes au voisinage du front.

Une façon heuristique de le vérifier consiste à faire un zoom sur le point  $P$  et à introduire un système local de coordonnées curvilignes  $(\zeta, r, \theta)$  où  $\zeta$  est un paramètre servant à décrire le front  $\gamma$  (par exemple son abscisse curviligne). Notant  $\underline{e}_\zeta$  le vecteur tangent à  $\gamma$  en  $P$ , les coordonnées  $(r, \theta)$  sont dans le plan normal à  $\gamma$  passant par  $P$  et orthogonal à  $\underline{e}_\zeta$ . L'origine des angles correspond à la

direction du vecteur  $\underline{t}$  intersection du plan normal à  $\gamma$  et du plan tangent à  $\Gamma$  en  $P$ , cf Figure 7.13. En cherchant toujours des singularités de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N K_i(\zeta) r^{\alpha_i} (U_r^i(\theta) \underline{e}_r + U_\theta^i(\theta) \underline{e}_\theta + U_\zeta^i(\theta) \underline{e}_\zeta) + \dots,$$

on retrouve les deux modes de déformation plane et le mode de déformation anti-plane<sup>13</sup>. Les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  dépendent *a priori* de  $\zeta$ .

### 7.3.4 Exemples de valeurs des facteurs d'intensité des contraintes

Alors que la forme des singularités au voisinage de la pointe d'une fissure est universelle (pour une classe de comportement donnée), les facteurs d'intensité des contraintes sont des grandeurs *globales* qui dépendent de la géométrie et du chargement de l'ensemble de la structure. Il faut donc les calculer dans chaque situation. Il existe différentes méthodes de calcul, allant des méthodes analytiques en 2D basées sur la théorie des potentiels complexes jusqu'aux méthodes numériques basées sur des intégrales de contour. Nous présenterons dans le prochain chapitre une méthode numérique du calcul du taux de restitution d'énergie qui permet d'accéder aux facteurs d'intensité des contraintes via la formule d'Irwin. En attendant, nous finissons cette section par quelques exemples de valeurs de facteurs d'intensité des contraintes qui ont été obtenues par des méthodes analytiques et qui sont donc exactes. Il existe des recueils entiers dédiés aux formules de facteurs d'intensité des contraintes, formules exactes ou approchées suivant les cas.

#### EXEMPLE 1 : Fissure rectiligne en milieu 2D infini.

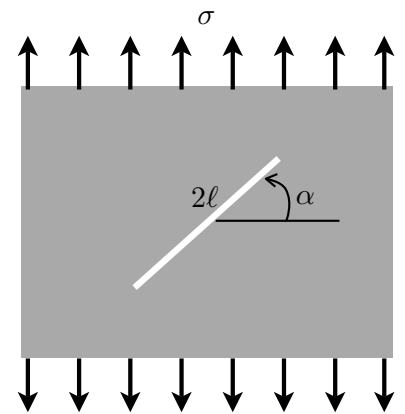
On exerce une traction uniaxiale  $\sigma$  à l'infini. La fissure est de longueur  $2\ell$  et est orientée d'un angle  $\pi/2 - \alpha$  par rapport à la direction de traction. En déformation plane,  $K_I$  et  $K_{II}$  (à chacune des deux pointes) sont donnés par

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \ell} \cos^2 \alpha, \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi \ell} \cos \alpha \sin \alpha$$

On remarque que  $K_{II} = 0$  si  $\alpha = 0$  (par symétrie), mais aussi que  $K_I = K_{II} = 0$  si  $\alpha = \pi/2$  (une fissure parallèle à la direction de traction est "invisible").

Notons que si l'on exerce une compression ( $\sigma < 0$ ) à l'infini, alors la fissure est en contact et donc en mode II pur. On a

$$K_I = 0, \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi \ell} \cos \alpha \sin \alpha \quad \text{si} \quad \sigma < 0.$$



13. Mais évidemment le plus difficile est de montrer qu'il n'existe pas d'autres singularités. Une telle démonstration générale fait défaut à ce jour.



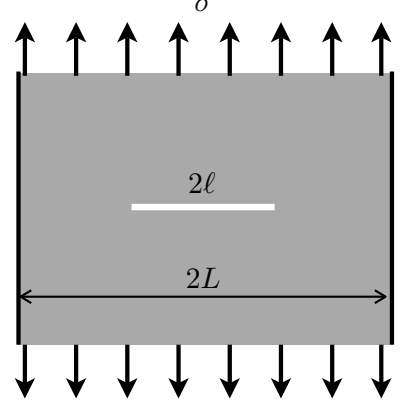
**EXEMPLE 2 : Fissure transversale dans une bande infinie 2D.**

La bande est de largeur  $2L$  et de longueur infinie. On exerce une traction uniaxiale  $\sigma$  à l'infini. La fissure est centrée dans la bande, transversale et de longueur  $2\ell$ . La fissure est donc en mode I. En déformation plane,  $K_I$  (à chacune des deux pointes) est donné par

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\pi \ell}{\cos \frac{\pi \ell}{2L}}}, \quad K_{II} = 0$$

On remarque que  $K_I \rightarrow \infty$  si  $\ell \rightarrow L$  et on retrouve le résultat précédent (avec  $\alpha = 0$ ) si  $L \rightarrow \infty$  à  $\ell$  fixé.

Si l'on exerce une compression ( $\sigma < 0$ ) à l'infini, alors la fissure est en contact et est invisible. On a  $K_I = K_{II} = 0$  si  $\sigma < 0$ .

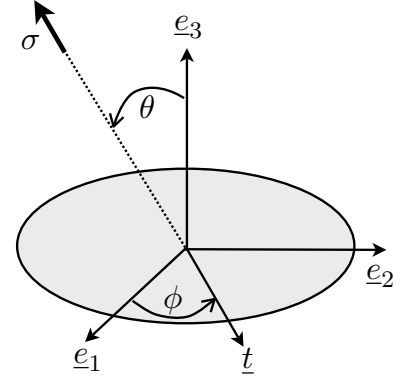


**EXEMPLE 3 : Fissure plane circulaire en milieu infini.**

La fissure est plane de vecteur normal  $\underline{e}_3$  et circulaire de rayon  $\ell$ . On exerce une traction uniaxiale  $\sigma$  à l'infini dans la direction  $\underline{n} = \cos \theta \underline{e}_3 + \sin \theta \underline{e}_1$ . On repère un point du front par l'angle  $\phi$  que fait  $\underline{t}$  avec  $\underline{e}_1$ , i.e.  $\underline{t} = \cos \phi \underline{e}_1 + \sin \phi \underline{e}_2$ .  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  le long du front sont donnés par

$$\begin{aligned} K_I(\phi) &= 2\sigma \sqrt{\frac{\ell}{\pi}} \cos^2 \theta \\ K_{II}(\phi) &= \frac{2\sigma}{2-\nu} \sqrt{\frac{\ell}{\pi}} \sin 2\theta \cos \phi \\ K_{III}(\phi) &= \frac{2(1-\nu)\sigma}{2-\nu} \sqrt{\frac{\ell}{\pi}} \sin 2\theta \sin \phi \end{aligned}$$

La fissure est en mode I si  $\theta = 0$ . Elle est invisible si  $\theta = \pi/2$ . Si l'on exerce une compression ( $\sigma < 0$ ) à l'infini, alors la fissure est en contact et on a  $K_I(\phi) = 0$ , les deux autres facteurs d'intensité des contraintes restant inchangés.



## 7.4 La ténacité et le critère de propagation des fissures d'Irwin

Nous présentons ici la loi de propagation postulée par Irwin, bien qu'elle présente des défauts évidents. Ces défauts seront partiellement corrigés lorsqu'on adoptera le point de vue énergétique de Griffith. Outre son intérêt historique, le modèle d'Irwin repose sur le concept de ténacité des matériaux, concept sur lequel s'appuient de nombreuses applications. La paternité du concept de singularité en front de fissure et son usage pour décrire la propagation des fissures est attribuée à Irwin (1957). En fait, il existait déjà des solutions exactes en élasticité tridimensionnelle pour des domaines fissurés

sur lesquelles s’est appuyé Irwin pour proposer une généralisation. De plus, il existait aussi une vaste littérature en 2D basée sur la théorie des potentiels complexes qui permettait de calculer de façon systématique des solutions analytiques. L’ouvrage de référence est celui de Mushkelishvili (1953). La contribution essentielle d’Irwin réside dans la proposition d’une loi d’évolution des fissures basée sur les facteurs d’intensité des contraintes.

Irwin introduit la notion de *ténacité* d’un matériau *isotrope* en postulant qu’il existe une valeur critique  $K_{Ic}$ <sup>14</sup> du facteur d’intensité des contraintes  $K_I$  du mode d’ouverture qui ne peut jamais être dépassée et en deçà de laquelle la fissure ne peut pas se propager. Autrement dit, il postule une loi d’évolution à seuil, comme en plasticité<sup>15</sup>, mais qui porte non pas sur les contraintes mais sur le facteur d’intensité des contraintes. Il peut paraître “peu physique” de bâtir une loi sur le coefficient d’une singularité qui est elle-même une “vue de l’esprit”. Mais comme, en vertu de la formule d’Irwin, les facteurs d’intensité des contraintes sont directement reliés au taux de restitution d’énergie potentielle, quantité à l’interprétation physique claire, ce concept de *ténacité* n’est pas à rejeter. Cependant, sa faiblesse réside dans son manque de généralité. On voit immédiatement que cette loi privilégie le mode I (et les matériaux isotropes), ce qui exclut évidemment tous les problèmes de propagation purement anti-plans et les propagations de fissures comprimées. Supposons donc que nous sommes en *déformation plane*. La **loi d’Irwin** peut alors s’écrire

$$K_I \leq K_{Ic}, \quad \begin{cases} \text{si } K_I < K_{Ic}, & \text{pas de propagation} \\ \text{si } K_I = K_{Ic}, & \text{propagation possible} \end{cases}.$$

Outre l’hypothèse implicite d’élasticité plane, cette loi ne peut manifestement pas être une loi générale même en élasticité plane. En effet, si l’on considère une fissure initiale soumise à un chargement de mode II pur (*i.e.* tel que  $K_I = 0$ ), alors cette fissure ne se propagera jamais quel que soit l’intensité du chargement. Ce n’est pas réaliste. On peut considérer que la loi d’Irwin est avant tout faite pour les fissures qui sont en mode I pur (*i.e.* telles que  $K_{II} = K_{III} = 0$ ). Dans ce cadre restreint, sa validité peut se vérifier expérimentalement. On utilise pour cela des essais normalisés tels l’*essai sur éprouvette CT* (Compact Tension) ou l’*essai de flexion SENB* (Single Edge Notch Bend) représentés schématiquement sur les figures 7.14-7.15. Dans les deux essais, on commence par usiner une entaille, puis on fait propager une fissure de fatigue à l’extrémité de l’entaille. On peut jouer sur la longueur de la fissure de fatigue pour avoir un paramètre géométrique et obtenir ainsi une famille de valeurs expérimentales. Dans l’essai CT, on impose un chargement symétrique à partir des deux trous de l’éprouvette, ce qui garantit une sollicitation en mode I. Dans l’essai SENB, on impose une force verticale au centre de l’éprouvette, ce qui garantit aussi par symétrie que la fissure de fatigue soit en mode I. On augmente la charge jusqu’à ce que la fissure se propage et on mesure la charge critique. Dans les deux essais, pour remonter à la *ténacité* il faut que l’on *calcule*  $K_I$  pour un chargement donné. Compte tenu de l’hypothèse d’élasticité linéaire, il suffit de calculer  $K_I$  pour un chargement unitaire et on l’obtient par linéarité pour n’importe quel chargement. Il faut noter toutefois que les conditions de l’essai ne sont ni des conditions de déformations planes ni des conditions de contraintes planes. En effet, les éprouvettes ont une certaine épaisseur et les deux surfaces externes sont libres de forces (donc  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_z = \underline{\underline{0}}$  sur ces faces de normale  $\underline{\underline{e}}_z$ ). Mais du fait du coefficient de Poisson la composante

14. La *ténacité*  $K_{Ic}$  est une caractéristique du matériau alors que  $K_I$  est une grandeur structurelle dépendant de la géométrie, du comportement et du chargement de l’ensemble de la structure

15. Irwin s’est probablement inspiré de la plasticité pour formuler sa loi.

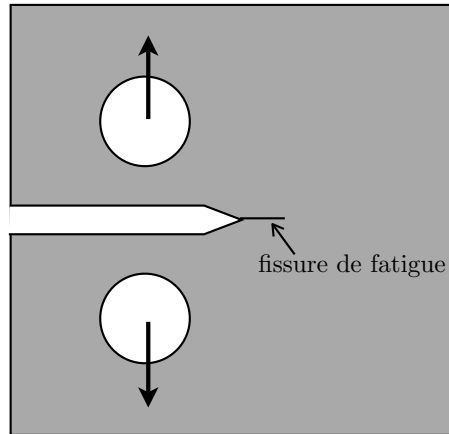


FIGURE 7.14 – Essai sur éprouvette CT permettant de mesurer la ténacité  $K_{Ic}$  d'un matériau.

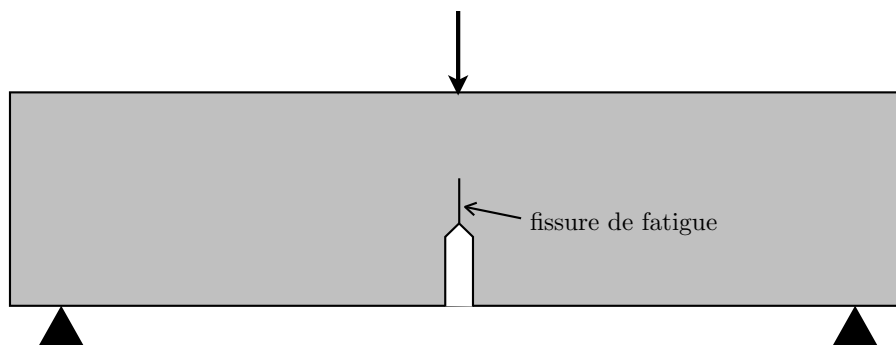


FIGURE 7.15 – Essai de flexion 3 points permettant de mesurer la ténacité  $K_{Ic}$  d'un matériau.

$\varepsilon_{zz}$  est en général non nulle. Il s'ensuit que l'essai n'est plus un essai d'élasticité plane et qu'il y a des effets 3D. La présence inévitable de déformations plastiques vient accentuer cette hétérogénéité des contraintes et des déformations dans l'épaisseur. La conséquence est que les résultats de l'essai dépendent de l'épaisseur de l'éprouvette. En particulier le démarrage de la fissuration peut ne pas avoir lieu simultanément en tous les points du front initial. En pratique, on s'attache donc à ce que les éprouvettes aient une épaisseur suffisante pour que l'hypothèse de déformations planes puisse être considérée comme acceptable. On peut faire l'essai pour tous les types de matériaux. On constate une variation importante de la ténacité d'un matériau à l'autre, les plus tenaces étant les aciers et les moins tenaces étant les matériaux du Génie Civil comme les ciments ou le béton. Le tableau 7.1 (emprunté à [19]) donne un aperçu de la valeur de la ténacité pour une large palette de matériaux.

Notons de plus que la ténacité dépend de la température. Plus la température est basse, moins le matériau est tenace. La chute de ténacité peut même être brutale en deçà d'une température appelée température de transition fragile-ductile, le matériau étant fragile avant et ductile après. Une courbe typique de dépendance de la ténacité en fonction de la température est représentée sur la Figure 7.16. Ce phénomène peut suffire à expliquer des accidents survenus sur des structures en acier en raison

Matériau	$E$ (GPa)	$K_{Ic}$ (MPa m <sup>1/2</sup> )	$G_c$ (J m <sup>-2</sup> )
Diamant	1000	4	15
Verre (Silice)	70	0.75	8
Mica	170	1.3	10
Composites à fibres de carbone	200–400	20–25	1000–3000
Pâte de ciment	20	0.5	10
Béton	30	1–1.5	30–80
Acier	200	20–200	50–50000

TABLE 7.1 – Module d’Young, ténacité et densité d’énergie de surface pour différents matériaux, d’après [19].

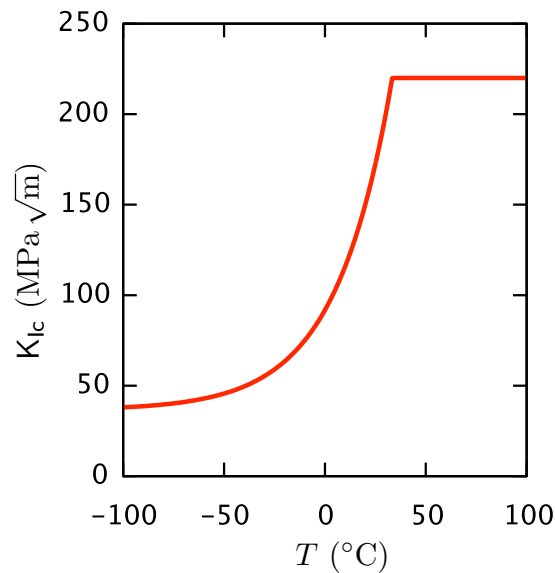


FIGURE 7.16 – Courbe empirique (ici, pour un acier) de dépendance de la ténacité par rapport à la température. La ténacité est pratiquement constante au delà de la température de transition fragile–ductile (ici, environ 30  $^{\circ}\text{C}$ ). Elle décroît très vite lorsque la température baisse.

du froid. Ainsi, par exemple, le pont de Sully-sur-Loire en janvier 1985 s’effondrait un matin sous faible charge, après une nuit très froide où la température avait chuté à environ  $-20^{\circ}\text{C}$ . La ténacité de l’acier incriminé a une ténacité qui est approximativement divisée par trois lorsque la température passe de  $+20^{\circ}\text{C}$  à  $-20^{\circ}\text{C}$ . Autres accidents “célestres” sont ceux des Liberty-ships, bateaux construits au cours de la seconde guerre mondiale, dont toute une série (de l’ordre de 200 navires sur les 5000 construits) s’est fissurée. Là encore, la responsabilité est attribuée aux basses températures.



## Chapitre 8

# Le point de vue énergétique

Ce chapitre est dédié à l'approche énergétique de la rupture fragile qui est à la base de la théorie de Griffith. En se plaçant dans le cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique, on introduit les grandeurs énergétiques fondamentales que sont l'énergie potentielle et le taux de restitution d'énergie potentielle. On s'appuie pour cela sur une extension du théorème de l'énergie potentielle, extension rendue délicate du fait de la condition de contact unilatéral entre les lèvres des fissures. Cette condition qui rend le problème d'élastostatique non linéaire exige de rétablir toutes les propriétés variationnelles. Le taux de restitution d'énergie potentielle représente la variation d'énergie potentielle de la structure sous chargement donné due à une propagation virtuelle de la fissure, quantité *globale* dont la définition et le calcul exigent une attention particulière du fait de l'inévitable présence de singularités en fond de fissure. Ensuite, on propose une méthode de calcul numérique du taux de restitution d'énergie potentielle et on établit le lien entre cette quantité et les facteurs d'intensité de contraintes grâce à la formule d'Irwin.

On introduit ensuite les deux autres grandeurs énergétiques de la théorie de Griffith que sont l'énergie de fissuration et le taux de création d'énergie de fissuration. Pour l'énergie de fissuration, on adopte l'hypothèse de Griffith ce qui conduit à la définition d'une densité surfacique d'énergie de fissuration caractéristique des matériaux fragiles. Cette grandeur est reliée à la ténacité via la formule d'Irwin. Le taux de création d'énergie de fissuration représente la variation d'énergie de fissuration due à une propagation virtuelle de la fissure, quantité *locale* qui est caractéristique du matériau en pointe de fissure.

Le chapitre s'achève par la formulation de la loi de propagation de Griffith qui consiste essentiellement à comparer le taux de restitution d'énergie potentielle au taux de création d'énergie de fissuration dans toute propagation virtuelle admissible. Cette loi est présentée dans les situations les plus fréquemment rencontrées en pratique.

## 8.1 Les grandeurs énergétiques

### 8.1.1 Formulation variationnelle de l'équilibre d'un objet fissuré

**ATTENTION** : Les conditions de contact unilatéral sans frottement que nous avons adoptées sur les lèvres de la fissure sont non linéaires et nous empêchent d'utiliser directement les résultats du chapitre 1. Il va donc s'agir de montrer qu'on peut encore les étendre à cette situation moyennant quelques petites modifications. Toutefois, les démonstrations sont sensiblement plus délicates que dans le cas du problème-type et peuvent être passées en première lecture.

Reprenons le problème de statique présenté dans le chapitre précédent. Introduisons l'ensemble  $\mathcal{C}$  des champs de déplacement cinématiquement admissibles<sup>1</sup>

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{\xi}^* : \begin{array}{l} \underline{\xi}^* \text{ régulier dans } \overline{\Omega} \setminus \Gamma, \quad \underline{\xi}^* = \underline{\xi}^d \text{ sur } \partial_D \Omega \setminus \Gamma, \\ \underline{\xi}^{*+} = \underline{\xi}^d \text{ sur } \partial_D \Omega \cap \Gamma, \quad \llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket \cdot \underline{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\}.$$

Notons qu'il dépend à la fois du chargement et de l'état de fissuration de la structure<sup>2</sup>. Du fait des conditions de non-interpénétration, ce n'est plus un espace affine mais seulement un ensemble *convexe*<sup>3</sup>. Soit  $\underline{\xi}^0$  un déplacement cinématiquement admissible et régulier, *i.e.* vérifiant la condition à la limite sur  $\partial_D \Omega$  et étant continu sur  $\overline{\Omega}$ . On peut alors écrire  $\mathcal{C} = \underline{\xi}^0 + \mathcal{C}_0$  avec

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ \underline{\xi}^* : \begin{array}{l} \underline{\xi}^* \text{ régulier dans } \overline{\Omega} \setminus \Gamma, \quad \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } \partial_D \Omega \setminus \Gamma, \\ \underline{\xi}^{*+} = \underline{0} \text{ sur } \partial_D \Omega \cap \Gamma, \quad \llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket \cdot \underline{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\}.$$

Ce faisant,  $\mathcal{C}_0$  est un cône convexe, *i.e.* si  $\underline{\xi}' \in \mathcal{C}_0$  et  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$  et si  $\theta' \geq 0$ ,  $\theta^* \geq 0$ , alors  $\theta' \underline{\xi}' + \theta^* \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$ .

Introduisons symétriquement l'ensemble  $\mathcal{S}$  des champs de contraintes statiquement admissibles (qui dépend également du chargement et de l'état de fissuration de la structure) :

$$\mathcal{S} = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^* : \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{f} = \underline{0} \text{ dans } \Omega \setminus \Gamma, \quad \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{T} \text{ sur } \partial_N \Omega \setminus \Gamma, \\ \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \sigma_{nn}^* \underline{n}, \quad \sigma_{nn}^* \leq 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\}$$

qui doivent donc vérifier l'équilibre volumique, les conditions aux limites de Neumann sur les bords correspondants non fissurés et qui doivent avoir des cisaillements nuls et des contraintes normales de compression sur les lèvres de la fissure. On va caractériser de tels champs de façon variationnelle, *i.e.* en termes de travaux virtuels. Pour cela, introduisons le travail des efforts extérieurs donnés  $W_{\text{ext}}$

1. On a besoin de considérer la fermeture de  $\Omega$  car une partie de la fissure peut se trouver sur le bord  $\partial_D \Omega$  et donc les champs peuvent y être discontinus.

2. Pour ne pas alourdir les notations, on ne note pas explicitement la dépendance de  $\mathcal{C}$  en l'état de fissuration et au chargement, car nous raisonnons ici à fissuration et chargement fixes. On explicitera cette dépendance quand on fera varier le chargement et la fissuration.

3. En fait,  $\mathcal{C}$  est un cône convexe pointé, ce qui est un peu mieux que convexe.

défini (aussi bien sur  $\mathcal{C}$  que sur  $\mathcal{C}_0$ ) par<sup>4</sup>

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\xi}^* d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^* dS.$$

On peut alors écrire les équations d'équilibre et les conditions aux limites d'un champ de contraintes statiquement admissibles  $\underline{\sigma}^*$  sous la forme de l'inéquation variationnelle suivante, variante du Principe des Travaux Virtuels :

$$\underline{\sigma}^* \in \mathcal{S} \iff \int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega \geq W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0. \quad (8.1)$$

PREUVE. En effet, soit  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$ . Multiplions (au sens du produit scalaire) les équations d'équilibre par  $\underline{\xi}^*$  et intégrons sur  $\Omega \setminus \Gamma$ . On obtient

$$0 = \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\text{div } \underline{\sigma}^* + \underline{f}) \cdot \underline{\xi}^* d\Omega. \quad (8.2)$$

Utilisons la formule d'intégration par parties suivante dont l'établissement est laissé à titre d'exercice (attention aux signes)

**Exercice 8.1.** Soit  $f$  une fonction scalaire régulière dans  $\bar{\Omega}$  et  $\underline{\xi}$  un champ de vecteurs défini sur  $\bar{\Omega}$  et discontinu sur  $\Gamma \subset \bar{\Omega}$ . Etablir (formellement) la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi_j d\Omega = - \int_{\Omega \setminus \Gamma} f \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega \cap \Gamma} f [\xi_j] n_i dS + \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma} f \xi_j n_i dS + \int_{\partial \Omega \cap \Gamma} f \xi_j^- n_i dS.$$

**ATTENTION** : Pour établir cette formule d'intégration par parties, il est important de noter que la normale extérieure au côté + en  $\underline{x}$  est  $-\underline{n}$  alors que la normale extérieure au côté - en  $\underline{x}$  est  $\underline{n}$ .

Grâce à cette formule, (8.2) devient

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega + \int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{f} \cdot \underline{\xi}^* d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma} \underline{\xi}^* \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} dS + \int_{\partial \Omega \cap \Gamma} \underline{\xi}^{*-} \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} dS - \int_{\Omega \cap \Gamma} [\underline{\xi}^*] \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} dS. \end{aligned}$$

Étudions chaque terme de bord séparément en partitionnant  $\partial \Omega$  en  $\partial_D \Omega$  et  $\partial_N \Omega$ . Notons auparavant que sur  $\Gamma$ , comme les cisaillements sont nuls, on a  $\underline{\xi}^{*\pm} \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \sigma_{nn}^* \underline{\xi}^{*\pm} \cdot \underline{n}$ .

- Sur  $\partial_D \Omega \setminus \Gamma$ . Comme  $\underline{\xi}^* = 0$ , l'intégrale disparaît.
- Sur  $\partial_N \Omega$ . On a  $\underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{T}$  et l'intégrale devient  $\int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^* dS$ .
- Sur  $\partial_D \Omega \cap \Gamma$ . Comme  $\underline{\xi}^{*+} = \underline{0}$ , on a  $0 \leq [\underline{\xi}^*] \cdot \underline{n} = -\underline{\xi}^{*-} \cdot \underline{n}$  et  $\sigma_{nn}^* \leq 0$ . Par conséquent  $\sigma_{nn}^* \underline{\xi}^{*-} \cdot \underline{n} \geq 0$  et l'intégrale est non négative.
- Sur  $\Omega \cap \Gamma$ . On a d'une part  $\sigma_{nn}^* \leq 0$  et d'autre part  $[\underline{\xi}^*] \cdot \underline{n} \geq 0$  donc le produit et l'intégrale sont non positifs.

---

4. Notons que cette définition du travail des efforts extérieurs dépend du chargement mais pas de l'état de fissuration. En particulier, à un champ de déplacement admissible pour deux états de fissuration différents est associée la même valeur du travail.



En reportant on obtient l'inéquation variationnelle (8.1) annoncée. Il est possible de montrer la réciproque, *i.e.* que si un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  vérifie l'inéquation variationnelle dans (8.1) alors il est statiquement admissible. Cette vérification, qui n'est pas essentielle pour la suite, est laissée à titre d'exercice.

**Exercice 8.2.** *Montrer que si un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  vérifie l'inéquation variationnelle dans (8.1), alors  $\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}$ .*

□

On voit que l'on n'a pas encore écrit les conditions exprimant l'alternative qu'il y a, à l'équilibre, ou bien contact ou bien que les forces de cohésion sont nulles. On va le faire et obtenir ainsi la propriété fondamentale suivante :

**Formulation variationnelle de l'équilibre d'un objet fissuré.** *Le champ de déplacement  $\underline{\xi}$  à l'équilibre est l'élément de  $\mathcal{C}$  qui vérifie l'inéquation variationnelle*

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) d\Omega \geq W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}, \quad (8.3)$$

*le champ de contraintes étant donné par  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi})$ .*

PREUVE. Montrons d'abord qu'il y a égalité dans (8.1) si on prend  $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\xi}^* = \underline{\xi} - \underline{\xi}^0$ . En effet, comme  $\underline{\xi} - \underline{\xi}^0 \in \mathcal{C}_0$ , il suffit de reprendre les calculs précédents et de vérifier que les intégrales sur  $\partial_D \Omega \cap \Gamma$  et sur  $\Omega \cap \Gamma$  sont nulles. C'est vrai car  $[[\underline{\xi}^0]] = \underline{0}$  et  $\sigma_{nn} [[\underline{\xi}]] \cdot \underline{n} = 0$  sur  $\Gamma$ . On a donc obtenu

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^0) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^0). \quad (8.4)$$

Récrivons l'inéquation (8.1) avec  $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}$  et en travaillant sur  $\mathcal{C}$  plutôt que sur  $\mathcal{C}_0$  :

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}^0) d\Omega \geq W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}^0), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}. \quad (8.5)$$

En retranchant l'équation (8.4) de l'inéquation (8.5), on obtient immédiatement (8.3) (ce qui a d'ailleurs le mérite de faire disparaître le champ  $\underline{\xi}^0$  particulier).

Réciproquement, pour passer de (8.3) à (8.4)-(8.5), on utilise le fait que  $\mathcal{C}_0$  est un cône. En prenant  $\underline{\xi}^* = \underline{\xi}^0$  on tire de (8.3) que

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^0) d\Omega \leq W_{\text{ext}}(\underline{\xi} - \underline{\xi}^0).$$

Puis en prenant  $\underline{\xi}^* = \underline{\xi}^0 + 2(\underline{\xi} - \underline{\xi}^0)$ , on tire de (8.3) l'inégalité inverse et donc l'égalité, *i.e.* (8.4). En reportant dans (8.3), on obtient (8.5). □

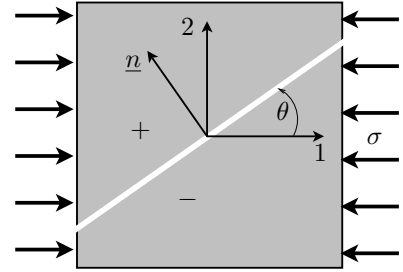
**Remarque.** *Notons que la relation de comportement n'intervient pas dans les raisonnements précédents, ce qui veut dire que cette formulation variationnelle de l'équilibre reste valable même si l'on introduit des pré-contraintes. De façon générale, elle resterait vraie même avec une relation contrainte-déformation non linéaire. Elle s'appuie par contre de façon essentielle sur l'hypothèse de petites perturbations.*

L'existence de l'équilibre dépend à la fois de l'état de fissuration et du chargement. Intuitivement, plus l'objet est fissuré et moins l'équilibre devient possible pour un chargement donné. Toutefois, à cause de la condition de non interpénétration, un objet peut être en équilibre tout en étant coupé en deux. Illustrons le sur quelques exemples.

**ASTUCE:** Pour montrer que l'équilibre est possible, il *suffit* d'exhiber un champ de contraintes statiquement admissible ou de façon équivalente un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  vérifiant l'inéquation variationnelle (8.1). Pour montrer que l'équilibre est impossible, il *faut* montrer que  $\mathcal{S}$  est vide et donc trouver une contradiction entre les équations d'équilibre volumiques et les conditions aux limites.

**EXEMPLE :**

Plaçons-nous en 2D, en contraintes planes et considérons un carré de côté  $a$ . Envisageons une fissure le coupant en deux parties et faisant un angle  $\theta$  avec la direction 1. Exerçons des efforts normaux uniformes  $\sigma$  sur les deux côtés opposés du carré parallèles à la direction 2, cf Figure. Etudions sous quelles conditions sur  $\theta$  et  $\sigma$  le carré fissuré peut être en équilibre. Les forces volumiques sont nulles.



1.  $\theta = 0$ . Prenons  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ . Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$  sont satisfaites. Sur  $\Gamma$ , comme  $\underline{n} = \underline{e}_2$ , on a  $\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$  et donc les conditions sont satisfaites. Ce champ est statiquement admissible.
2.  $\theta = \pi/2$  et  $\sigma \leq 0$ . Prenons toujours  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$  et vérifions les conditions aux limites sur  $\Gamma$ . Comme  $\underline{n} = -\underline{e}_1$  et que  $\sigma_{21} = 0$  sont nuls, les cisaillements sont nuls. La contrainte normale vaut  $\sigma \leq 0$  et donc la condition est satisfaite. Ce champ est statiquement admissible.
3.  $\theta = \pi/2$  et  $\sigma > 0$ . Montrons qu'il n'existe pas de champ statiquement admissible, du fait que l'on exerce une traction. Supposons le contraire et considérons  $\underline{\underline{\sigma}}$  admissible. Partons des équations d'équilibre  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$  et intégrons-les sur la moitié droite  $\Omega^-$  du carré (entre la fissure et le côté droit). Il vient en tenant compte du fait que  $\sigma_{21} = 0$  sur  $\Gamma$ , que la normale extérieure à  $\Omega^-$  sur  $\Gamma$  est  $-\underline{e}_1$ , que  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1 = \sigma \underline{e}_1$  sur le côté droit et que  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_2 = \underline{0}$  sur les autres faces,

$$\underline{0} = \int_{\Omega^-} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} d\Omega = \int_{\partial\Omega^-} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \sigma a \underline{e}_1 - \int_{\Gamma} \sigma_{11} dS \underline{e}_1.$$

On doit donc avoir  $\int_{\Gamma} \sigma_{11} dS = \sigma a > 0$  mais aussi  $\sigma_{11} \leq 0$  sur  $\Gamma$ , ce qui fournit la contradiction.

4.  $0 < \theta < \pi/2$ ,  $\sigma \neq 0$ . Montrons qu'il n'existe pas de champ statiquement admissible, cette fois-ci du fait que les cisaillements sont nuls sur la fissure. Toujours par contradiction, supposons qu'il existe  $\underline{\underline{\sigma}}$  admissible. Intégrons les équations d'équilibre sur la partie  $\Omega^-$ . Comme  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_{nn} \underline{n}$  et  $\underline{n} = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$  sur  $\Gamma$ , on obtient

$$\underline{0} = \int_{\Omega^-} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} d\Omega = \int_{\partial\Omega^-} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \sigma a \underline{e}_1 + \int_{\Gamma} \sigma_{nn} dS (-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2).$$

En projetant sur  $\underline{e}_2$  on trouve  $\int_{\Gamma} \sigma_{nn} dS = 0$ , mais alors l'équation suivant  $\underline{e}_1$  ne peut être satisfaite. D'où la contradiction. (Notons toutefois que si l'on tenait compte du frottement entre les lèvres de la fissure, il pourrait y avoir équilibre lorsque  $\sigma < 0$ .)

### 8.1.2 L'énergie potentielle

Grâce à la formulation variationnelle de l'équilibre on va pouvoir établir que le théorème de l'énergie potentielle reste vrai pour un objet fissuré, c'est-à-dire que le déplacement d'équilibre est celui qui minimise l'énergie potentielle parmi les déplacements cinématiquement admissibles. Rappelons auparavant la définition de l'énergie potentielle associée à un déplacement admissible.

**Définition de l'énergie potentielle.** Soit  $\underline{\xi}^*$  un déplacement cinématiquement admissible avec le chargement imposé et l'état de fissuration  $\Gamma$  du milieu, i.e.  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$ . L'énergie potentielle du milieu dans cet état de fissuration, sous ce chargement et dans ce déplacement est par définition<sup>5</sup>

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*). \quad (8.6)$$

On peut donc établir le

**Théorème de l'énergie potentielle.** Si compte tenu de l'état de fissuration l'équilibre est possible, alors le champ de déplacement à l'équilibre est celui qui minimise l'énergie potentielle parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, i.e.

$$\boxed{\underline{\xi} \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{P}(\underline{\xi}) \leq \mathcal{P}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.}$$

PREUVE. La démonstration est facilitée par le fait que l'énergie élastique est quadratique. En supposant qu'il existe un  $\underline{\xi} \in \mathcal{C}$  solution du problème de statique, par de simples manipulations algébriques, il vient pour tout  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{\xi}^*) - \mathcal{P}(\underline{\xi}) &= \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^* : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}^* - \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon} \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) \\ &= \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} (\underline{\varepsilon}^* - \underline{\varepsilon}) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\varepsilon}^* - \underline{\varepsilon}) d\Omega + \int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\sigma} : (\underline{\varepsilon}^* - \underline{\varepsilon}) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^* - \underline{\xi}) \end{aligned}$$

où  $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{\xi})$  et  $\underline{\varepsilon}^* = \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*)$ . Comme le tenseur de rigidité est positif, la première intégrale est non négative. Comme on suppose qu'il existe une solution, le champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  vérifie (8.3) et on en déduit que  $\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) - \mathcal{P}(\underline{\xi}) \geq 0$ , ce qui constitue le résultat cherché.  $\square$

L'absence d'équilibre se voit dans l'énergie potentielle par le fait qu'elle n'est pas bornée inférieurement sur  $\mathcal{C}$ . Si on peut construire une suite  $\{\underline{\xi}_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{C}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\underline{\xi}_n^*) = -\infty$ , c'est que l'équilibre est impossible, et réciproquement.

---

5. Notons que cette définition de l'énergie potentielle associée à un champ de déplacement dépend *a priori* du chargement et de l'état de fissuration. Toutefois, compte tenu des hypothèses faites sur le chargement, à un champ de déplacement admissible pour deux états de fissuration différents est associée une même valeur de l'énergie potentielle de la structure.

**Remarque.** Dans le cas de pré-contraintes imposées, le théorème de l'énergie potentielle reste valable à condition de prendre pour définition de l'énergie potentielle

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) + \underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire l'un des piliers de la Mécanique de la Rupture Fragile.

**Définition de l'énergie potentielle à l'équilibre.** L'énergie potentielle  $P(\Gamma)$  de la structure  $\Omega$  en équilibre dans son état de fissuration  $\Gamma$  et sous le chargement caractérisé par les données des déplacements imposés  $\underline{\xi}^d$  sur  $\partial_D \Omega$  et des forces imposées  $\underline{f}$  dans  $\Omega$  et  $\underline{T}$  sur  $\partial_N \Omega$  est l'énergie potentielle du champ de déplacement d'équilibre :

$$P(\Gamma) = \mathcal{P}(\underline{\xi}) = \min_{\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}} \mathcal{P}(\underline{\xi}^*).$$

Cette énergie est évidemment structurelle, elle dépend à la fois de la géométrie, du comportement, du chargement et de l'état de fissuration. Son calcul exact est le plus souvent impossible et il faut avoir recours à des approximations. Nous en étudierons quelques propriétés dans la prochaine sous-section.

### 8.1.3 Le taux de restitution d'énergie potentielle

Dans la théorie de Griffith, le critère de propagation d'une fissure est basé sur la notion de taux de restitution d'énergie potentielle, notion que nous introduisons ici. Il s'agit dans un premier temps de comparer l'énergie potentielle d'une structure dans deux états de fissuration différents mais soumise au même chargement. Intuitivement, on sent bien que plus une structure est fissurée, plus elle est souple et moindre est son énergie potentielle. Cela se démontre facilement dans un cadre général grâce au théorème de l'énergie potentielle. Établissons ce résultat fondamental

**Décroissance de l'énergie potentielle avec la fissuration.** Soit une structure  $\Omega$  en équilibre sous un même chargement, mais dans deux états de fissuration différents  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  avec  $\Gamma'$  plus grand que  $\Gamma$ , i.e.  $\Gamma' \supset \Gamma$ . Alors l'énergie potentielle de la structure dans l'état  $\Gamma'$  est plus petit (ou égal) à l'énergie potentielle dans son état  $\Gamma$  :

$$\Gamma' \supset \Gamma \implies P(\Gamma') \leq P(\Gamma).$$

PREUVE. Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  les ensembles de déplacements cinématiquement admissibles associés aux états de fissuration  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . Tout déplacement admissible pour  $\Gamma$  est forcément continu sur  $\Gamma' \setminus \Gamma$  et est donc également admissible pour  $\Gamma'$  (se reporter à la définition de  $\mathcal{C}$ ). En d'autres termes, on a  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ . En utilisant le théorème de l'énergie potentielle, on obtient

$$P(\Gamma) = \min_{\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}} \mathcal{P}(\underline{\xi}^*) \geq \min_{\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}'} \mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = P(\Gamma'),$$

ce qui est l'inégalité désirée. □

Ce résultat dit que la croissance de la fissuration à chargement constant se traduit par une restitution d'énergie potentielle de la structure. Le *taux de restitution d'énergie potentielle* sert à quantifier

cette propriété en termes de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la surface fissurée. Toutefois, cette définition de la dérivée demande à être précisée. Nous allons le faire progressivement en envisageant des cas de plus en plus complexes.

ATTENTION : Dans tous les exemples 2D, si l'on considère que le domaine  $\Omega$  est bidimensionnel, alors l'énergie potentielle telle qu'elle a été définie en (8.6) a la dimension d'une *force* (Newton) et pas d'une *énergie* (Newton-mètre). Il faut la multiplier par une épaisseur si cette dernière a un sens dans le problème considéré ou bien raisonner par unité d'épaisseur. Dans toute la suite de ce cours, nous raisonnerons par unité d'épaisseur dans tous les exemples 2D considérés (sauf mention explicite du contraire).

De la même façon, le taux de restitution d'énergie potentielle est théoriquement une variation d'énergie par *aire* de fissure créée et s'exprime donc en Newton/mètre. Par conséquent, dans les exemples 2D, si l'on raisonne par unité d'épaisseur, alors le taux de restitution d'énergie potentielle devient la variation d'énergie potentielle (telle qu'elle est définie par (8.6)) par *longueur* de fissure créée.

1. *Fissure unique en 2D*. Considérons un objet bidimensionnel  $\Omega$  dans lequel va se développer une fissure dont on connaît *a priori* le trajet. Ce trajet est une courbe régulière  $\hat{\Gamma}$  de longueur  $L$  et l'état de fissuration est caractérisé par la position de la pointe de la fissure sur cette courbe. On peut repérer la pointe par son abscisse curviligne  $\ell$ ,  $\ell$  croissant de 0 à  $L$  au fur et à mesure que la fissure se propage le long du trajet. Ce faisant, l'*énergie potentielle* de la structure (par unité d'épaisseur) sous un chargement donné est donc une fonction décroissante de  $\ell$ , soit  $P(\ell)$ . On définit alors le taux de restitution d'énergie potentielle  $G$  par<sup>6</sup>

$$G = -\frac{dP}{d\ell}(\ell).$$

Le signe moins est évidemment introduit de façon à ce que  $G$  soit une quantité positive.

2. *Fissures multiples en 2D*. Supposons maintenant que se développent dans ce même objet 2D plusieurs fissures, chacune suivant un trajet prédéfini. (On peut aussi simplement considérer une seule fissure intérieure au domaine, mais dont les deux pointes peuvent se propager.)

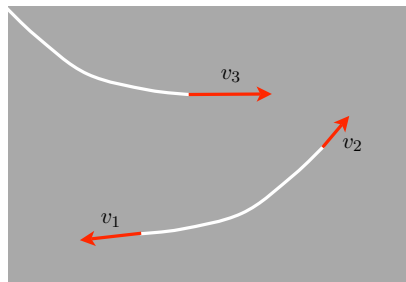


FIGURE 8.1 – Avancée virtuelle des différentes pointes de fissure

---

6. Un point délicat sur le plan théorique est de montrer que cette dérivée existe. Ce n'est pas garanti car cela dépend du trajet de la fissure dans l'objet. On peut le démontrer sous certaines hypothèses. Nous supposons que c'est vrai.

Soit  $n$  le nombre de pointes susceptibles de se propager et  $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n)$  le  $n$ -uplet servant à caractériser leur position. L'énergie potentielle (par unité d'épaisseur) est maintenant une fonction de  $n$  variables, soit  $P(\underline{\ell})$ . On peut définir le taux “partiel” de restitution d'énergie  $G_i$  dû à la propagation (virtuelle) de la  $i$ -ème pointe, les autres restant fixes, à l'aide de la dérivée partielle de  $P$  par rapport à  $\ell_i$  et définir le taux de restitution d'énergie comme un  $n$ -uplet :

$$\underline{G} = (G_1, \dots, G_n), \quad G_i = -\frac{\partial P}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}).$$

Chacun des  $G_i$  est non négatif (dans la mesure où il est défini). On peut aussi calculer le taux de restitution d'énergie dû à la propagation simultanée des  $n$  pointes caractérisée par leur “vitesse relative” respective  $v_i$ , :

$$G = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( P(\underline{\ell} + h\underline{v}) - P(\underline{\ell}) \right), \quad \underline{v} = (v_1, \dots, v_n), \quad 0 \leq v_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n v_i = 1.$$

Sous réserve de dérivabilité de  $\underline{\ell} \mapsto P(\underline{\ell})$ , ce qui n'est pas garanti à cause des conditions de contact unilatéral<sup>7</sup>, on peut exprimer  $G$  comme une combinaison linéaire des  $G_i$  :

$$G = \underline{G} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n G_i v_i.$$

3. *Fissure plane en 3D.* Plaçons-nous en 3D et envisageons dans l'objet une fissure plane  $\Gamma$  susceptible de se propager dans son plan. Soit  $\gamma$  le front de fissure, courbe régulière paramétrée par son abscisse curviligne  $\zeta$ . Notons  $\underline{t}$  le vecteur dans le plan de la fissure orthogonal au front pointant vers l'extérieur de la fissure.

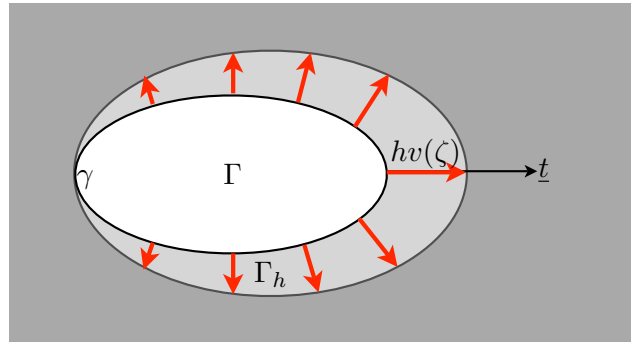


FIGURE 8.2 – Avancée virtuelle du front  $\gamma$  de la fissure plane  $\Gamma$

Envisageons une propagation virtuelle du front caractérisée par la fonction  $\zeta \mapsto v(\zeta)$  représentant la “vitesse normale relative” d’avancée du front, *i.e.* la fissure passant de  $\Gamma$  à  $\Gamma_h$  pour  $h > 0$

7. Il peut arriver que  $\underline{\ell} \mapsto P(\underline{\ell})$  admette uniquement des dérivées directionnelles et que ces dérivées directionnelles ne dépendent pas linéairement de la direction. La raison physique est que l’avancée d’une pointe peut modifier les conditions de contact des autres fissures et que les effets ne s’ajoutent pas.

assez petit avec

$$v \geq 0, \quad \int_{\gamma} v(\zeta) d\zeta = 1, \quad \Gamma_h = \Gamma \bigcup_{\zeta} [\gamma(\zeta), \gamma(\zeta) + hv(\zeta)\underline{t}(\zeta)].$$

Définissons le taux de restitution d'énergie potentielle de la fissure dans cette propagation virtuelle comme étant  $G = \lim_{h \rightarrow 0} (P(\Gamma_h) - P(\Gamma))/h$ . Comme dans le cas précédent, sous réserve de dérivabilité de l'énergie,  $G$  dépend de façon linéaire de la vitesse normale  $\zeta \mapsto v(\zeta)$  et peut donc être vu comme une forme linéaire qui peut s'écrire

$$G = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(\Gamma_h) - P(\Gamma)) = \int_{\gamma} G(\zeta) v(\zeta) d\zeta.$$

où  $G(\zeta) \geq 0$  représente la densité linéique de taux de restitution d'énergie au point  $\zeta$  du front.

4. *Bifurcation d'une fissure en 2D.* Considérons en bidimensionnel une fissure qui bifurque, *i.e.* dont la branche initiale se divise en deux branches.

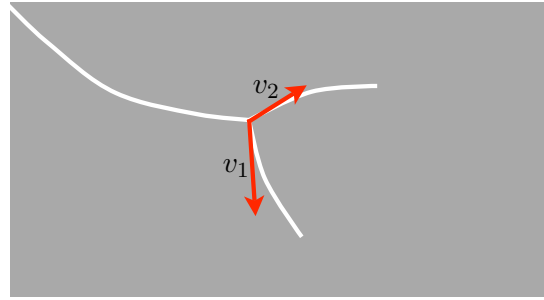


FIGURE 8.3 – Bifurcation d'une fissure

La vitesse de croissance des deux branches peut être différente. Appelons  $\underline{t}_1$  et  $\underline{t}_2$  les vecteurs tangents aux deux branches au point de bifurcation  $\underline{x}$ . Si  $v_1 \geq 0$  et  $v_2 \geq 0$ , avec  $v_1 + v_2 = 1$ , désignent les vitesses relatives de croissance des deux branches, on peut définir le taux de restitution d'énergie lors de la bifurcation comme

$$G = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(\Gamma_h) - P(\Gamma)), \quad \Gamma_h = \Gamma \cup [\underline{x}, \underline{x} + hv_1\underline{t}_1] \cup [\underline{x}, \underline{x} + hv_2\underline{t}_2].$$

Le taux de restitution d'énergie dépend de  $v_1$  et  $v_2$ , mais contrairement aux cas précédents cette dépendance n'est jamais linéaire car on ne peut pas traiter séparément les deux branches.

**ATTENTION** : Noter que l'on a systématiquement normalisé les vitesses virtuelles de propagation en imposant que leur somme (discrete ou continue) soit égale à 1. C'est nécessaire si l'on veut que la taux de restitution d'énergie représente bien la variation d'énergie potentielle par unité de surface de fissure créée.

**Remarque.** De façon générale, le taux de restitution d'énergie potentielle est mathématiquement la dérivée directionnelle de l'énergie dans la direction de propagation définie par la vitesse virtuelle. De façon générique, on le notera  $G$  et le définirons par

$$G = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(\Gamma) - P(\Gamma_h)}{\text{aire}(\Gamma_h) - \text{aire}(\Gamma)}, \quad (8.7)$$

$\Gamma_h$  désignant une famille de fissures contenant  $\Gamma$  et tendant vers  $\Gamma$  quand  $h$  tend vers 0.  $G$  dépend évidemment de la “direction” de propagation envisagée.

## 8.2 Le calcul de $G$ et la formule d'Irwin

Nous nous proposons dans cette section de développer une méthode de calcul du taux de restitution d'énergie. Nous établirons ensuite la *formule d'Irwin* qui fait le lien entre le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contraintes. Nous finirons ce chapitre par quelques exemples de calcul des facteurs d'intensité des contraintes.

### 8.2.1 Une méthode de calcul de $G$ .

Cette méthode<sup>8</sup> a le double mérite de fournir d'une part un cadre théorique pour prouver la dérivabilité de l'énergie potentielle et d'autre part une formule permettant de calculer numériquement  $G$  de façon précise dans les situations les plus fréquentes. On peut la mettre en œuvre en 3D aussi bien qu'en 2D. Toutefois pour alléger la présentation, nous nous contentons de l'établir ici dans le cas 2D-plan et sous quelques hypothèses simplificatrices sur la géométrie de la fissure et le chargement.

La difficulté du calcul du taux de restitution d'énergie tient au fait que l'énergie potentielle est une quantité globale définie sur le domaine fissuré. Il s'agit donc de calculer la dérivée d'une intégrale définie sur un domaine variable. De plus la présence de singularités vient compliquer la tâche et interdit l'utilisation des formules classiques. Il faut établir de nouvelles formules en évitant les écueils dus au domaine variable et aux singularités. L'idée est de tout “transporter” sur un domaine fixe puis de dériver classiquement sous le signe intégral. On obtient ainsi une formule pour le calcul de  $G$  se présentant sous la forme d'une intégrale sur le domaine fissuré réel ne faisant intervenir que les champs des déplacements  $\underline{\xi}$  et des contraintes  $\underline{\sigma}$  à l'équilibre et le champ de vecteurs  $\underline{v}$  ayant servi pour le transport sur un domaine fixe.

La méthode est mise en œuvre sous les hypothèses suivantes sur lesquelles nous reviendrons :

HYPOTHÈSES : On suppose que

1. Le milieu est bidimensionnel (en terme d'énergie, on raisonnera par unité d'épaisseur, cf l'avertissement page 188). Sa configuration de référence “saine”  $\Omega$  est coupée par une fissure  $\Gamma$  qui est une courbe régulière, rectiligne au voisinage de la pointe  $\mathbf{P}$  ;
2. Le comportement est linéairement élastique sans pré-déformations ;

---

8. Cette méthode est couramment appelée méthode  $G$ - $\theta$ ,  $\theta$  étant le champ de vecteurs utilisé pour l'établir. Ici, nous noterons ce champ  $\underline{v}$  pour conserver la logique de nos notations,  $\underline{v}(\mathbf{P})$  représentant la vitesse virtuelle de la pointe  $\mathbf{P}$  de la fissure.



3. La pointe de la fissure  $\mathbf{P}$  dont on envisage la propagation virtuelle est située à l'intérieur du domaine dans une zone où le milieu est homogène (et donc pas à une interface) ;
4. À l'équilibre sous le chargement considéré, il n'y a pas de contact entre les lèvres de la fissure qui sont libres de force.
5. Les forces volumiques au voisinage de la pointe de la fissure sont des fonctions régulières de  $\underline{x}$ .

On envisage une extension de la fissure dans la direction de la tangente  $\underline{t}$  à la pointe  $\mathbf{P}$  et pour cela on ajoute à  $\Gamma$  un segment de longueur  $h$  assez petite. La fissure étendue est donc  $\Gamma_h = \Gamma \cup [\mathbf{P}, \mathbf{P} + h\underline{t}]$ . Il s'agit de calculer

$$G = - \frac{d}{dh} P(\Gamma_h) \Big|_{h=0} \quad \text{avec} \quad P(\Gamma_h) = \int_{\Omega \setminus \Gamma_h} (W(\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}_h)) - \underline{f} \cdot \underline{\xi}_h) d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}_h dS$$

où  $\underline{\xi}_h$  désigne les déplacements à l'équilibre du domaine avec pour état de fissuration  $\Gamma_h$ , à chargement fixé. On note  $W(\underline{\varepsilon})$  le potentiel élastique, *i.e.*

$$W(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}) = \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}.$$

Pour renvoyer  $\Omega \setminus \Gamma_h$  sur le domaine fixe  $\Omega \setminus \Gamma$ , on utilise un champ de vecteurs  $\underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x})$  défini sur  $\Omega$ , continûment différentiable par morceaux et possédant les propriétés suivantes, cf Figure 8.4 :

$$\underline{v}(\mathbf{P}) = \underline{t}, \quad \underline{v} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \underline{v} = \underline{0} \text{ en dehors du voisinage de } \mathbf{P} \text{ où } \Gamma \text{ est rectiligne.}$$

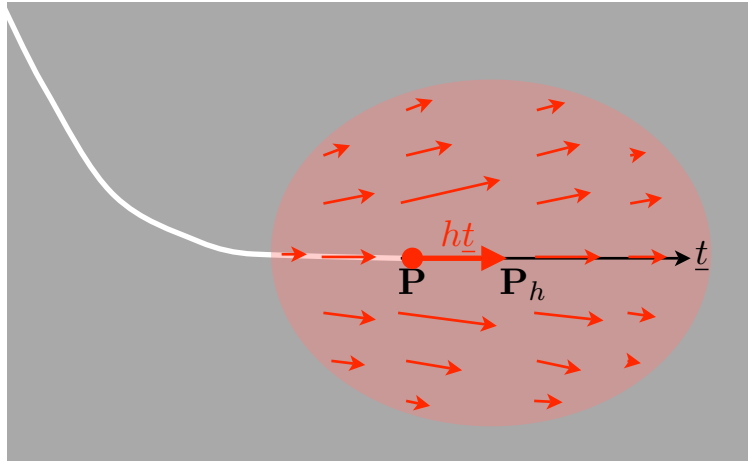


FIGURE 8.4 – Zone de l'objet au voisinage de la pointe de la fissure  $\mathbf{P}$  et représentation du champ de vecteur  $\underline{v}$  servant à transporter  $\Omega \setminus \Gamma$  sur  $\Omega \setminus \Gamma_h$ .

La transformation  $\varphi_h$  qui à  $\underline{x}$  associe  $\underline{x}_h = \varphi_h(\underline{x}) = \underline{x} + h\underline{v}(\underline{x})$  est pour  $h$  assez petit une bijection sur  $\Omega$  qui transforme  $\Gamma$  en  $\Gamma_h$ , qui transforme la pointe  $\mathbf{P}$  en la pointe translatée  $\mathbf{P}_h = \mathbf{P} + h\underline{t}$  et qui

laisse les points de  $\partial\Omega$  invariants. La transformation inverse  $\varphi_h^{-1}$  envoie donc l'ouvert variable  $\Omega \setminus \Gamma_h$  sur l'ouvert fixe  $\Omega \setminus \Gamma$ . Transportons également le déplacement  $\underline{\xi}_h$ , qui est un élément de  $\mathcal{C}(\Gamma_h)$  mais pas de  $\mathcal{C}(\Gamma)$ , en le champ  $\underline{\xi}_h^b = \underline{\xi}_h \circ \varphi_h$  qui lui est un élément de  $\mathcal{C}(\Gamma)$ <sup>9</sup>. En notant  $\underline{F}_h = \underline{\nabla} \varphi_h = \underline{I} + h \underline{\nabla} v$  le gradient de la transformation, on a donc en utilisant les formules classiques de changement de variable et de dérivation de fonction composée

$$dx_h = \det \underline{F}_h(x) dx, \quad \underline{\nabla} \underline{\xi}_h(\underline{x}_h) = \underline{\nabla} \underline{\xi}_h^b(\underline{x}) \underline{F}_h(\underline{x})^{-1}.$$

En reportant dans l'expression de  $P(\Gamma_h)$  il vient

$$P(\Gamma_h) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( W \left( \frac{1}{2} \underline{\nabla} \underline{\xi}_h^b \underline{F}_h^{-1} + \frac{1}{2} \underline{F}_h^{-T} (\underline{\nabla} \underline{\xi}_h^b)^T \right) - \underline{f} \circ \varphi_h \cdot \underline{\xi}_h^b \right) \det \underline{F}_h d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}_h dS$$

où l'on a utilisé le fait que les points de  $\partial_N \Omega$  sont invariants. En vertu du théorème de l'énergie potentielle, on peut aussi remarquer que  $\underline{\xi}_h^b$  minimise sur  $\mathcal{C}(\Gamma)$  l'énergie potentielle "transportée"  $\mathcal{P}_h$  :

$$P(\Gamma_h) = \mathcal{P}_h(\underline{\xi}_h^b) = \min_{\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{P}_h(\underline{\xi}^*)$$

avec

$$\mathcal{P}_h(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( W \left( \frac{1}{2} \underline{\nabla} \underline{\xi}^* \underline{F}_h^{-1} + \frac{1}{2} \underline{F}_h^{-T} (\underline{\nabla} \underline{\xi}^*)^T \right) - \underline{f} \circ \varphi_h \cdot \underline{\xi}^* \right) \det \underline{F}_h d\Omega - \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^* dS.$$

On se sert de cette propriété pour montrer que  $h \mapsto \underline{\xi}_h^b$  est dérivable en  $h = 0$  et on note  $\dot{\underline{\xi}}$  cette dérivée (nous admettrons ce résultat de régularité) :

$$\dot{\underline{\xi}} = \left. \frac{d}{dh} \underline{\xi}_h^b \right|_{h=0}.$$

On peut alors dériver par rapport à  $h$  sous le signe intégral. On utilise les identités suivantes :  $\varphi_0 = \underline{i}$ ,  $\underline{F}_0 = \underline{I}$ ,  $\underline{\xi}_0 = \underline{\xi}$  et

$$\left. \frac{d}{dh} \varphi_h \right|_{h=0} = \underline{v}, \quad \left. \frac{d}{dh} \underline{F}_h^{-1} \right|_{h=0} = -\underline{\nabla} \underline{v}, \quad \left. \frac{d}{dh} \det \underline{F}_h \right|_{h=0} = \operatorname{div} \underline{v}, \quad \left. \frac{d}{dh} \underline{f} \circ \varphi_h \right|_{h=0} = \underline{\nabla} \underline{f} \cdot \underline{v}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= - \int_{\Omega \setminus \Gamma} (W(\underline{\varepsilon}(\underline{\xi})) - \underline{f} \cdot \underline{\xi}) \operatorname{div} \underline{v} d\Omega + \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\underline{\sigma} : (\underline{\nabla} \underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} \underline{v}) + \underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} \underline{f} \cdot \underline{v}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\dot{\underline{\xi}}) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \dot{\underline{\xi}} d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \dot{\underline{\xi}} dS. \end{aligned}$$

---

9. On montre que  $\underline{\xi}_h^b$  est dérivable par rapport à  $h$ . Sa dérivée (qui s'interprète comme une vitesse de déplacement) est un champ qui a la même régularité que  $\underline{\xi}$ . On peut la prendre comme champ test dans les formulations variationnelles. Par contre la dérivée de  $\underline{\xi}_h$  par rapport à  $h$  est un champ plus singulier (avec une singularité en  $1/\sqrt{r}$  en pointe de fissure à cause du déplacement de la pointe de la fissure). Elle n'est pas d'énergie finie et on ne peut donc pas la prendre comme champ test. C'est cette absence de régularité qui interdit l'utilisation des formules de dérivation classiques.

Comme on a supposé qu'il n'y avait pas de forces de contact sur les lèvres de la fissure à l'équilibre, on a  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0}$  sur  $\Gamma$ . Comme  $\underline{\xi} = \underline{0}$  sur  $\partial_D \Omega$ , on déduit des équations d'équilibre et des conditions aux limites que

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\dot{\underline{\xi}}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \dot{\underline{\xi}} d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \dot{\underline{\xi}} dS$$

ce qui élimine la deuxième ligne dans l'expression précédente de  $\mathbf{G}$ . Par conséquent, en regroupant les termes restants, l'expression de  $\mathbf{G}$  se réduit à

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( \underline{\sigma} : (\nabla \underline{\xi} \cdot \nabla \underline{v}) - W(\underline{\varepsilon}(\underline{\xi})) \operatorname{div} \underline{v} + \operatorname{div}(\underline{f} \otimes \underline{v}) \cdot \underline{\xi} \right) d\Omega$$

ou encore en termes des composantes avec sommation sur les indices répétés

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial (f_i v_k)}{\partial x_k} \xi_i \right) d\Omega$$

Commentons cette formule avant de revenir sur les hypothèses faites pour l'établir.

Cette formule de calcul de  $\mathbf{G}$  est donc une intégrale de volume nécessitant la connaissance des champs des déplacements et des contraintes à l'équilibre sous le chargement considéré dans l'état de fissuration  $\Gamma$ . Par contre, bien qu'il s'agisse d'une dérivée, il n'est pas nécessaire de calculer les champs à l'équilibre dans les états de fissuration voisins  $\Gamma_h$ . En particulier, la "vitesse de déplacement"  $\dot{\underline{\xi}}$  a disparu au cours du calcul grâce aux équations d'équilibre. L'autre acteur dans ce calcul est le champ  $\underline{v}$ . On pourrait penser à la vue de la formule que  $\mathbf{G}$  dépend de  $\underline{v}$ . Il n'en est rien car la définition de  $\mathbf{G}$  est intrinsèque et nous le vérifierons avec la formule d'Irwin que nous établissons un peu plus loin. Par contre, d'un point de vue numérique, comme on ne calcule pas en général *exactement* les champs à l'équilibre mais uniquement des valeurs approchées (c'est le cas avec la méthode des éléments finis par exemple), la valeur numérique approchant  $\mathbf{G}$  dépend *a priori* de  $\underline{v}$ . Se pose alors la question de son choix afin que la précision soit la meilleure possible. On peut avoir intérêt à tester plusieurs champs  $\underline{v}$ . Sur le plan pratique, la construction automatique de champs  $\underline{v}$  est également un souci. Cette méthode (qui date des années 1980) est désormais implantée dans les "grands" codes de calcul.

Certaines des hypothèses adoptées pour établir la formule de  $\mathbf{G}$  peuvent être levées sans que le résultat change (mais parfois au prix d'une augmentation substantielle des difficultés techniques pour l'établir). D'autres sont importantes car la formule change si elles ne sont pas vérifiées, mais elles ne remettent pas en cause toutefois la méthode. D'autres enfin sont vitales sans quoi la méthode ne s'applique pas. Passons les en revue.

1. *Milieu 2D, fissure rectiligne.* Cette hypothèse peut être levée sans que le résultat change. On peut même utiliser la formule en 3D à condition de voir le champ  $\underline{v}$  comme un champ de vecteurs dont la valeur sur le front de fissure vaut la vitesse de propagation virtuelle du front envisagée, soit  $v(\zeta)\underline{t}(\zeta)$  avec les notations de la section 8.1.3. Le fait que la fissure soit rectiligne ou plane est secondaire. Toutefois, il est absolument vital que la vitesse de propagation virtuelle se fasse dans le "prolongement" de la fissure existante. La méthode ne s'applique plus dans le cas d'un branchement, *i.e.* dans le cas d'un changement de direction de la fissure ;

2. *Elasticité linéaire.* On peut étendre sans difficulté la méthode à l'élasticité non linéaire ou à l'élasticité linéaire avec pré-déformations. Toutefois dans ce dernier cas la formule change car vient s'ajouter un terme dans l'expression de  $G$  lorsque ces pré-déformations dépendent de  $\underline{x}$ .
3. *Pointe de la fissure en milieu homogène.* La méthode ne s'applique plus si la pointe est à une interface comme le point  $I'$  sur la figure 7.10, car en transportant la future pointe sur l'ancienne on est obligé de modifier les constantes élastiques. Cette difficulté technique traduit le fait que  $G$  peut ne pas être défini dans cette situation.
4. *Non contact entre les lèvres.* Cette hypothèse sert à simplifier la démonstration. Mais la présence de contact peut conditionner les questions de régularité. Toute la démonstration est à revoir s'il y a contact.
5. *Forces volumiques régulières.* On voit que la formule n'est plus valable si les forces volumiques sont par exemple discontinues, ce qui est le cas pour un bi-matériau dans un champ de pesanteur à cause de masses volumiques différentes. On est dans une situation voisine d'une fissure d'interface et la méthode *a priori* ne s'applique plus.

Il existe d'autres méthodes de calcul de  $G$ . Citons par exemple l'intégrale  $J$  de Rice, qui est une intégrale de contour (et non de volume). Elle s'appuie sur le fait que sous certaines hypothèses (très restrictives, comme fissure rectiligne, milieu homogène, absence de forces volumiques, ...) l'intégrale  $J$  est indépendante du choix du contour (dans la mesure où il entoure la pointe de la fissure). On montre que  $J = G$  et on peut choisir à sa guise le contour d'intégration. Toutefois, ce résultat d'invariance vis à vis du contour tient essentiellement à des propriétés de symétrie du problème et n'est pas une vraie propriété mécanique générale. De plus, l'évaluation numérique de l'intégrale de contour peut se révéler moins précise que l'intégrale de volume de la méthode  $G-\theta$ , car elle nécessite d'estimer avec précision les contraintes et le gradient des déplacements le long d'un contour.

## 8.2.2 La formule d'Irwin

Nous établissons ici un résultat essentiel qui fait le lien entre le taux de restitution d'énergie (grandeur globale) et les facteurs d'intensité des contraintes (grandeurs globales attachées à la forme locale des singularités). La formule porte le nom de formule d'Irwin bien qu'il soit difficile de retrouver qui est le véritable auteur de la formule dans un cadre raisonnablement général. La démonstration que nous utilisons ici s'appuie sur la formule de  $G$  établie dans la sous-section précédente et repose donc sur les mêmes hypothèses. Nous nous plaçons tout d'abord en 2D-déformations planes et matériau linéairement élastique et isotrope, cadre dans lequel nous avons établi la forme des singularités.

**Formule d'Irwin en déformations planes.** *Dans un milieu linéairement élastique et **isotrope en déformations planes**, le taux de restitution d'énergie potentielle  $G$  associé à une propagation virtuelle de la fissure dans la direction de la tangente à la pointe de la fissure et les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  en pointe la pointe de la fissure sont reliés par la formule d'Irwin*

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2).$$

PREUVE. On part de la formule de  $G$  établie précédemment avec des notations condensées :

$$G = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \left( \sigma_{ij} \xi_{i,k} v_{k,j} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \xi_{i,j} v_{k,k} + (f_i v_k)_{,k} \xi_i \right) d\Omega.$$

Considérons la boule  $\mathbf{B}_r$  (fermée) de centre la pointe de la fissure  $\mathbf{P}$  et de rayon  $r$  assez petit et destiné à tendre vers 0. On note  $\mathbf{C}_r$  le bord de  $\mathbf{B}_r$ , *i.e.* le cercle de centre  $\mathbf{P}$  et de rayon  $r$ . On partitionne  $\Omega \setminus \Gamma$  en la partie  $\tilde{\mathbf{B}}_r$  incluse dans  $\mathbf{B}_r$  (c'est donc la boule privée du segment  $\Gamma_r = [\mathbf{P} - r\mathbf{t}, \mathbf{P}]$ ) et la partie  $\mathbf{D}_r$  extérieure à  $\mathbf{B}_r$ . Intégrons par parties l'intégrale sur  $\mathbf{D}_r$  en remarquant que le bord de  $\mathbf{D}_r$  est la réunion de  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{C}_r$  et  $\Gamma \setminus \Gamma_r$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_{\mathbf{D}_r \cup \tilde{\mathbf{B}}_r} (\sigma_{ij}\xi_{i,k}v_{k,j} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\xi_{i,j}v_{k,k} + (f_i v_k)_{,k}\xi_i) d\Omega \\ &= \int_{\tilde{\mathbf{B}}_r} (\sigma_{ij}\xi_{i,k}v_{k,j} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\xi_{i,j}v_{k,k} + (f_i v_k)_{,k}\xi_i) d\Omega \\ &\quad + \int_{\mathbf{D}_r} \left( -(\sigma_{ij}\xi_{i,k})_{,j}v_k + \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\xi_{i,j})_{,k}v_k - f_i v_k \xi_{i,k} \right) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\mathbf{D}_r} (\sigma_{ij}n_j \xi_{i,k}v_k - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\xi_{i,j}v_k n_k + f_i \xi_i v_k n_k) ds. \end{aligned}$$

Etudions chaque terme séparément.

- Comme les contraintes et le gradient des déplacements sont singuliers comme  $1/\sqrt{r}$  au voisinage de  $\mathbf{P}$ , le terme le plus singulier dans l'intégrale sur  $\tilde{\mathbf{B}}_r$  est de l'ordre de  $1/r$  et comme  $d\Omega$  est de l'ordre de  $r$ , le produit est de l'ordre de 1. Par conséquent la limite de l'intégrale sur  $\tilde{\mathbf{B}}_r$  quand  $r$  tend vers 0 est nulle.
- Montrons que l'intégrande de  $\mathbf{D}_r$  est nul. On note tout d'abord que  $(\sigma_{ij,j} + f_i)\xi_{i,k}v_k = 0$  en vertu des équations d'équilibre. Il reste  $\frac{1}{2}(-\sigma_{ij}\xi_{i,jk} + \sigma_{ij,k}\xi_{i,j})v_k$ . Mais comme  $\sigma_{ij} = C_{ijpq}\varepsilon_{pq} = C_{ijpq}\xi_{p,q}$  et que le milieu est homogène là où  $v_k$  n'est pas nul, on a  $(\sigma_{ij}\xi_{i,jk} - \sigma_{ij,k}\xi_{i,j})v_k = (C_{ijpq}\xi_{p,q}\xi_{i,jk} - C_{ijpq}\xi_{p,qk}\xi_{i,j})v_k = 0$  en vertu de la symétrie des coefficients élastiques ( $C_{ijpq} = C_{pqij}$ ). D'où le résultat.
- L'intégrale sur  $\partial\Omega$  est nulle car  $\underline{v} \cdot \underline{n}$  y est nul. L'intégrale sur  $\Gamma \setminus \Gamma_r$  est nulle car  $\underline{v} \cdot \underline{n}$  et  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  y sont nuls. Il reste l'intégrale sur  $\mathbf{C}_r$ . Le terme  $f_i \xi_i v_k n_k ds$  est de l'ordre de  $r^{3/2}$  et donc l'intégrale tend vers 0 quand  $r \rightarrow 0$ .

En passant à la limite quand  $r \rightarrow 0$ , on a donc

$$\mathbf{G} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbf{C}_r} (\sigma_{ij}n_j \xi_{i,k}v_k - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\xi_{i,j}v_k n_k) ds. \quad (8.8)$$

La fin de la démonstration est un long calcul où on utilise le système de coordonnées polaires de la Figure 7.11, les formes singulières des champs des déplacements et des contraintes de la section 7.3.1, le fait que  $\underline{v}(\mathbf{P}) = \underline{t} = \cos\theta \underline{e}_r - \sin\theta \underline{e}_\theta$  et que  $\underline{n} = -\underline{e}_r$ ,  $ds = r d\theta$  sur  $\mathbf{C}_r$ . Il faut reporter dans l'intégrale et intégrer en  $\theta$  entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Nous n'en donnerons pas les détails, mais on notera que les contraintes et le gradient des déplacements étant de l'ordre de  $1/\sqrt{r}$ , leur produit est de l'ordre de  $1/r$  et en multipliant par  $r d\theta$  l'intégrande est donc de l'ordre de 1.  $\square$

En fait, la formule peut-être étendue au 2D-antiplan et au 3D. On peut suivre la même démarche que dans la démonstration précédente et on arrive à l'équation (8.8). En 2D-antiplan, on obtient la formule suivante

**Formule d'Irwin en déformations anti-planes.** *Dans un milieu linéairement élastique et **isotrope en déformations anti-planes**, le taux de restitution d'énergie potentielle  $\mathbf{G}$  associé à une*

propagation virtuelle de la fissure dans la direction de la tangente à la pointe de la fissure et les facteurs d'intensité de contraintes  $K_{III}$  en pointe de la fissure sont reliés par la formule d'Irwin

$$G = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2.$$

**Exercice 8.3.** Démontrer la formule d'Irwin en déformations antiplanes. (On pourra partir de l'équation (8.8).)

En 3D, en utilisant les notations des sections 8.1.3 et 7.3.3, il suffit de considérer que  $\mathbf{C}_r$  est le tore centré sur le front de fissure  $\gamma$  dont la section au point  $\mathbf{P}(\zeta)$  par le plan  $(\underline{t}(\zeta), \underline{n}(\zeta))$  est le cercle de centre  $\mathbf{P}(\zeta)$  et de rayon  $r$ . En prenant  $\underline{v}(\mathbf{P}(\zeta)) = v(\zeta)\underline{t}(\zeta)$  et en admettant que les singularités sont toujours une combinaison des modes I, II et III, on obtient la formule suivante

**Formule d'Irwin en 3D.** Dans un milieu linéairement élastique et *isotrope*, le taux de restitution d'énergie potentielle  $\langle G, v \rangle$  associé à une propagation virtuelle de la fissure de vitesse normale  $v(\zeta)$  le long du front  $\gamma$  et les facteurs d'intensité de contraintes locaux  $K_I(\zeta), K_{II}(\zeta), K_{III}(\zeta)$  sont reliés par la formule d'Irwin :

$$\langle G, v \rangle = \int_{\gamma} G(\zeta) v(\zeta) d\zeta$$

avec

$$G(\zeta) = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I(\zeta)^2 + K_{II}(\zeta)^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}(\zeta)^2.$$

## 8.3 L'hypothèse de Griffith sur l'énergie de fissuration

### 8.3.1 L'énergie de fissuration

Après l'énergie potentielle, introduisons l'autre grand pilier de la Mécanique de la Rupture Fragile qu'est l'énergie de fissuration. L'énergie potentielle représente l'énergie emmagasinée par la structure, essentiellement sous forme élastique, en réponse aux sollicitations. Cette énergie disparaît dès qu'on relâche les efforts. L'énergie de fissuration, elle, est pérenne et est intimement liée à l'hypothèse faite sur la cohésion ou la non cohésion des fissures. Il est donc fondamental de distinguer l'origine des deux énergies. L'énergie potentielle est structurelle donc globale, dépendante à la fois de la géométrie, du chargement et du comportement ; elle se calcule. L'énergie de fissuration est matérielle donc locale ; elle se mesure.

Dans la théorie de Griffith où l'on néglige les forces de cohésion, l'énergie de fissuration de la structure est une énergie de surface qui s'apparente à l'énergie de tension superficielle pour les liquides mais avec toutefois des différences fondamentales sur lesquelles nous reviendrons. C'est l'énergie qu'il faut fournir au matériau pour rompre sa cohésion interne. Essayons d'en chercher ses origines pour les solides dans les potentiels d'interaction atomiques. Considérons un potentiel d'interaction atomique du type Lennard-Jones,  $U(r)$ , correspondant à l'énergie que possède un atome lorsqu'il est placé à une distance  $r$  d'un autre atome isolé dans l'espace. L'exemple typique est

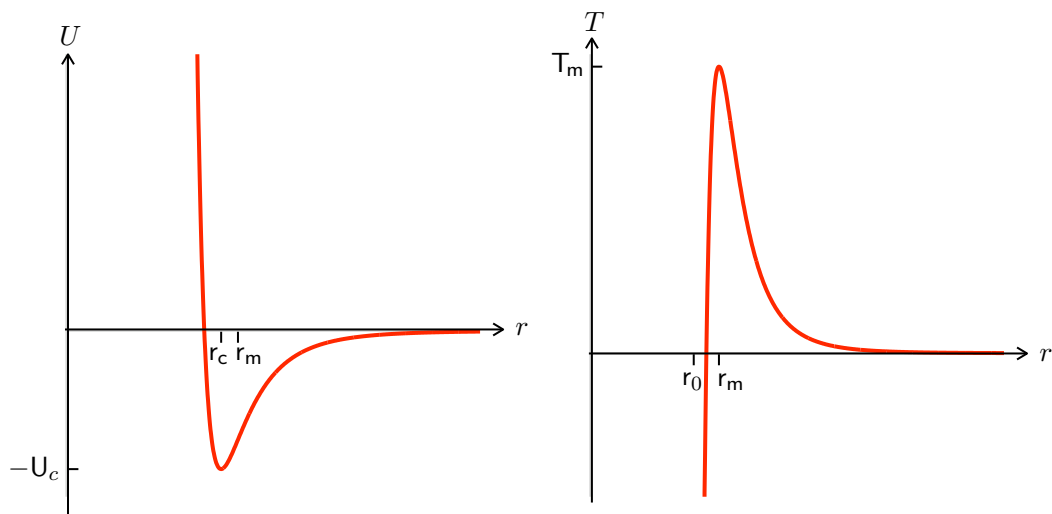


FIGURE 8.5 – Interaction atomique du type Lennard-Jones. À gauche : le potentiel d'interaction ; à droite : la force d'interaction entre deux atomes en fonction de leur distance.

$$U(r) = 4U_c \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right),$$

où  $r_0$  est la distance où l'énergie potentielle est nulle et  $-U_c$  est l'énergie dans la position d'équilibre  $r_c = 2^{1/6}r_0$ . Par dérivation, on en déduit la force d'interaction (centrale) entre les atomes, répulsive à courte distance, attractive à longue distance :

$$T(r) = -U'(r) = \frac{24U_c}{r} \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} \right).$$

Elle croît tout d'abord, s'annule à la distance d'équilibre, est maximale en  $r_m \approx 1.24 r_0$  où elle vaut  $T_m \approx 2.40 U_c/r_0$ , puis décroît vers 0. Quand on a éloigné infiniment les deux atomes en partant de leur distance d'équilibre, l'énergie de l'ensemble a augmenté de  $U_c$ .

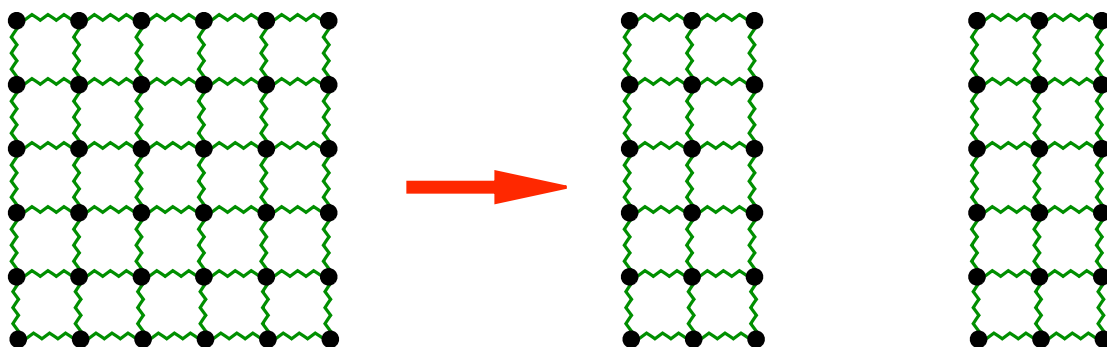


FIGURE 8.6 – Séparation en deux blocs d'un réseau d'atomes et justification de l'énergie de fissuration. (Les ressorts symbolisent les interactions entre plus proches voisins.)

Imaginons une chaîne de  $N + 1$  atomes interagissant selon ce potentiel. En ne considérant que l'interaction des plus proches voisins, la distance interatomique d'équilibre est  $r_c$  et la chaîne possède alors l'énergie  $-NU_c$ . Si nous “coupons” cette chaîne en deux en éloignant infiniment les deux morceaux, l'ensemble a maintenant l'énergie  $-(N - 1)U_c$  et a donc “gagné”  $U_c$  par rapport à la chaîne “saine”. Recommençons le raisonnement en 2D et imaginons un réseau carré de  $(N + 1)^2$  d'atomes qui, toujours dans l'approximation des plus proches voisins, sera en équilibre avec une distance interatomique de  $r_c$  et une énergie  $-N^2U_c$ . En éloignant infiniment deux rangées d'atomes, l'énergie des deux morceaux est augmentée de  $(N + 1)U_c$ . Comme le côté du carré est de longueur naturelle  $L = Nr_c$ , on a donc fourni au réseau d'atomes une énergie valant, en première approximation,  $U_c L / r_c$ . Ce gain d'énergie est donc proportionnel à la longueur de la “fissure” avec une constante de proportionnalité  $U_c / r_c$ . En 3D, on obtiendrait de même que l'énergie gagnée par un réseau cubique de côté  $L$  lorsque il est séparé en deux morceaux est (approximativement) égale à  $G_c L^2$  avec

$$G_c = \frac{U_c}{r_c^2}.$$

L'énergie de fissuration est donc proportionnelle à la surface fissurée, la constante de proportionnalité  $G_c$  étant caractéristique du potentiel d'interaction. Notons que ce raisonnement simplifié repose sur deux approximations : l'interaction uniquement des plus proches voisins et l'éloignement infini des deux morceaux. Corriger la première changerait la constante  $G_c$  et induirait des effets de bord. Corriger la deuxième changerait radicalement le modèle en faisant dépendre l'énergie de fissuration de la distance des lèvres de la fissure. C'est l'essence de la théorie de Barenblatt.

Si nous conservons nos hypothèses simplificatrices et comparons les valeurs mesurées expérimentalement de  $G_c$  avec la valeur “théorique”  $U_c / r_c^2$ , on constate que la valeur théorique sous-estime fortement la valeur réelle. La raison est à chercher au niveau des mécanismes de la fissuration à plus petite échelle. À petite échelle, les lèvres des fissures ne sont jamais lisses, mais présente une rugosité qui peut augmenter substantiellement la surface réelle de fissuration. À une échelle intermédiaire, la fissure est entourée d'une zone endommagée (réseaux de micro-fissures) ou plastifiée qui du point de vue énergétique est une énergie dissipée en volume qui vient s'ajouter à l'énergie de surface. Au total, suivant les matériaux et suivant les conditions de fissuration, dont en particulier la température, l'énergie effective de fissuration peut être bien plus grande que le simple produit de la densité d'énergie de surface théorique par la surface fissurée apparente à grosse échelle. En conclusion, la densité surfacique d'énergie de fissuration effective  $G_c$  doit faire l'objet de mesure expérimentale spécifique. On peut par exemple utiliser les essais sur éprouvette CT ou de flexion 3 points comme pour la mesure de la ténacité. En anticipant sur le critère de propagation de Griffith que nous présentons plus loin, on peut utiliser la formule d'Irwin pour relier  $K_{Ic}$  à  $G_c$ , sachant que ces essais sont faits en mode I et (approximativement) en déformations planes :

$$G_c = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{Ic}^2.$$

Notons cependant que cette notion de densité surfacique d'énergie de fissuration a une portée beaucoup plus générale que la ténacité. On peut l'utiliser aussi bien en mode III qu'en mode mixte. On peut la généraliser à des *matériaux anisotropes*, dans ce cas-là  $G_c$  est fonction de l'orientation  $\underline{n}$  de la fissure. On peut aussi l'étendre à des fissures d'interface. Mais évidemment toutes ces extensions



doivent recevoir une confirmation expérimentale. En résumé, dans le cadre de la théorie de Griffith, l'énergie de fissuration de la structure dans son état de fissuration  $\Gamma$  est donnée par

$$\text{Energie de fissuration : } D(\Gamma) = \int_{\Gamma} G_c(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) dS.$$

### 8.3.2 Le taux de création d'énergie de fissuration

De la même façon que l'on définit le taux de restitution d'énergie potentielle de la structure dans une évolution virtuelle de la fissuration à chargement fixé, on peut définir le *taux de création d'énergie de fissuration* dans la même évolution virtuelle de la fissuration. Sa définition générale est la suivante :

**Définition du taux de création d'énergie de fissuration.** Soit  $\Gamma$  l'état de fissuration réel et  $\Gamma_h$  une famille d'états de fissuration virtuels plus grands que  $\Gamma$ , i.e.  $\Gamma \subset \Gamma_h$ , et tel que l'aire (ou la longueur)<sup>10</sup> de  $\Gamma_h \setminus \Gamma$  tende vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$ . On appelle *taux de création d'énergie de fissuration* la limite suivante (que l'on notera  $D'$  pour évoquer qu'il s'agit d'une dérivée de  $D$ ) :

$$D' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(\Gamma_h) - D(\Gamma)}{\text{aire}(\Gamma_h) - \text{aire}(\Gamma)}.$$

Le taux de création d'énergie de fissuration représente donc l'apport d'énergie de surface par unité de surface créée. Il est évidemment directement lié à  $G_c$  et coïncide avec lui en milieu homogène isotrope. Donnons quelques exemples.

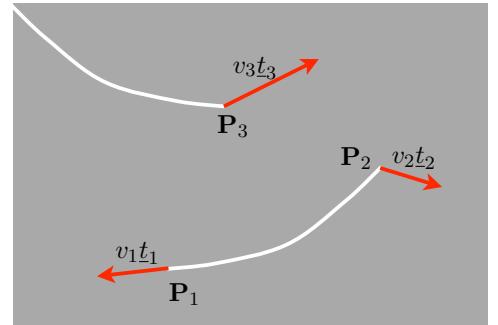
**ATTENTION :** Comme pour l'énergie potentielle et le taux de restitution d'énergie potentielle, il faut faire attention aux dimensions dans les problèmes 2D. Nous raisonnerons systématiquement (sauf mention explicite du contraire) par unité d'épaisseur, ce qui veut dire que l'énergie de fissuration aura comme l'énergie potentielle la dimension d'une *force*. En contrepartie, le taux de création d'énergie de fissuration sera la variation d'énergie de variation par *longueur* de fissure créée et s'exprimera bien en Newton/mètre.

**EXEMPLE 1 :** *Milieu homogène isotrope.* Dans ce cas, comme  $D(\Gamma) = G_c \text{aire}(\Gamma)$ , on a  $D' = G_c$ .

**EXEMPLE 2 :** *Fissures multiples en 2D dans un milieu non homogène et non isotrope.*

Envisageons une propagation virtuelle de chacune des  $n$  pointes  $\mathbf{P}_i$  dans la direction  $\underline{t}_i$  (cette direction ne coïncide pas forcément avec la tangente à la fissure en  $\mathbf{P}_i$ ) et la vitesse relative  $v_i$ . Si l'on note  $\underline{n}_i$  le vecteur orthogonal à  $\underline{t}_i$ , le taux de création d'énergie de fissuration est donné par :

$$D' = \sum_{i=1}^n G_c(\mathbf{P}_i, \underline{n}_i) v_i, \quad 0 \leq v_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n v_i = 1.$$



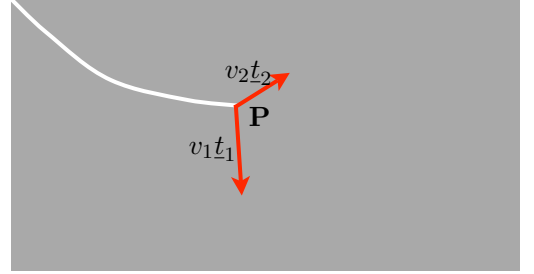
10. C'est l'aire en 3D et la longueur en 2D, cf le warning ci-dessus.

EXEMPLE 3 : *Bifurcation d'une fissure en 2D.*

Dans le cas d'une bifurcation au point  $\mathbf{P}$  dans les directions  $\underline{t}_1$  et  $\underline{t}_2$  avec des vitesses relatives  $v_1$  et  $v_2 = 1 - v_1$ , on a

$$\mathbf{D}' = \mathbf{G}_c(\mathbf{P}, \underline{n}_1)v_1 + \mathbf{G}_c(\mathbf{P}, \underline{n}_2)v_2.$$

où  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$  sont les normales aux branches.



Si le milieu est isotrope, on a  $\mathbf{D} = \mathbf{G}_c(\mathbf{P})$  et le fait qu'il y ait branchement ne joue pas de rôle dans le taux de création d'énergie de fissuration (alors qu'il est essentiel dans le taux de restitution d'énergie).

## 8.4 La loi de propagation de Griffith

Dans cette section, nous réintroduisons le temps ou plus exactement le paramètre  $t$  servant à décrire le trajet de chargement et l'évolution de l'état du milieu considéré, dont en particulier son état de fissuration. Les forces volumiques  $\underline{f}$ , les forces surfaciques  $\underline{T}$  et les déplacements imposés  $\underline{\xi}^d$  dépendent de  $t$ . Ce faisant l'énergie potentielle de la structure à l'équilibre à l'instant  $t$  dans l'état de fissuration (réel ou virtuel)  $\Gamma$  dépend à la fois de  $t$  et de  $\Gamma$ . Cette dépendance est réintroduite explicitement et l'énergie potentielle est désormais notée  $\mathbf{P}(t, \Gamma)$ . La fissuration va évoluer sous l'effet du chargement et l'état de fissuration réel à l'instant  $t$  est noté  $\Gamma(t)$ . On se donne l'état de fissuration initial, soit  $\Gamma_0$ .

### 8.4.1 Les principes sur lesquels s'appuient la loi de Griffith

Il s'agit donc d'écrire la loi qui régit  $t \mapsto \Gamma(t)$ . Cette loi se décline en trois items, chacun associé à un principe physique que nous présentons brièvement avant de les formuler précisément.

1. **L'irréversibilité de la fissuration** Une (autre) différence essentielle entre l'énergie de surface d'un liquide et l'énergie de surface d'un solide fissuré est liée à la notion d'*irréversibilité*. Aussi bien dans les liquides que dans le modèle d'interaction atomique introduit précédemment, le processus de création d'énergie de surface est réversible. Pour un liquide, il suffit de replonger la goutte dans un bain du même liquide pour que l'on ne puisse plus la distinguer et que son énergie de tension superficielle disparaisse. Pour la chaîne d'atomes, il suffit de rapprocher les deux atomes ou les deux rangées d'atomes séparés pour retrouver la cohésion initiale. En ce qui concerne les fissures macroscopiques, l'expérience quotidienne montre qu'il n'en est rien et que les lèvres des fissures ne cicatrisent pas même si on les remet en contact<sup>11</sup>. Il faut donc introduire dans la modélisation cette condition d'irréversibilité qui dans le cadre de la théorie

11. Bien sûr, ce phénomène de cicatrisation peut avoir lieu, mais il met alors en jeu d'autres mécanismes physico-chimiques que ceux qui ont opéré lors de la séparation. Ces mécanismes sont consommateurs d'énergie et producteurs d'entropie, leur modélisation passe par l'introduction de variables d'état supplémentaires et de lois de comportement appropriées.

de Griffith où l'on néglige les forces de cohésion se réduit à une simple condition de croissance dans le temps de la fissuration :

**Condition d'irréversibilité de la fissuration :**  $t \mapsto \Gamma(t)$  **croissant.**

2. **Le critère de stabilité de Griffith.** Le critère de propagation de Griffith est un critère énergétique qui consiste à comparer le taux de restitution d'énergie potentielle au taux de création d'énergie de fissuration. En substance, il consiste à postuler que la fissuration doit nécessairement évoluer si la structure a emmagasiné assez d'énergie potentielle pour créer de nouvelles surfaces fissurées, *i.e. grosso modo* si  $G > D'$ . La contraposée est donc que la structure fissurée ne peut être dans un état d'équilibre stable que si  $G \leq D'$ . Comme on ne s'intéresse qu'à des évolutions où l'état de la structure est stable à chaque instant sous le chargement imposé, on devra donc écrire cette inégalité à chaque instant. C'est une condition qui porte non seulement sur l'état de fissuration actuel  $\Gamma(t)$  mais aussi sur les "directions" d'évolution possibles. Il s'agit donc de préciser quelles sont les directions d'évolution à tester. Nous procéderons par étapes et supposerons d'abord que le trajet des fissures est connu *a priori*. Il s'agit alors simplement de tester si la fissure peut ou non avancer dans la direction prédéfinie. La recherche du trajet sera étudiée dans une autre section.
3. **Le bilan d'énergie de Griffith.** Lorsque la fissuration évolue, la structure restitue effectivement de l'énergie potentielle et crée effectivement de l'énergie de fissuration. Le principe de Griffith est de dire que le bilan est parfaitement équilibré, c'est à dire que toute l'énergie potentielle restituée est effectivement transformée en énergie de fissuration. Autrement dit, *en supposant que l'évolution de la fissuration est continue en temps*, le bilan d'énergie dit que l'on doit avoir  $G = D'$  quand la fissure se propage.

Les deux derniers items demandent à être écrits de façon plus précise. C'est ce que nous allons faire dans quelques cas types.

#### 8.4.2 Etat de fissuration ne dépendant que d'un paramètre

Plaçons-nous dans la situation où l'état de fissuration ne dépend que d'un paramètre  $\ell$  qui peut représenter sa longueur ou de façon plus générale sa taille. C'est le cas par exemple dans un milieu 2D contenant une seule fissure dont on se donne *a priori* le trajet qu'elle suivra. Mais on peut imaginer bien d'autres situations, dont des situations 3D, où c'est le cas<sup>12</sup>. Il s'agit donc de trouver la fonction  $t \mapsto \ell(t)$  pour  $t > 0$  connaissant l'état initial  $\ell(0) = \ell_0$ . L'énergie potentielle est la fonction de deux variables  $P(t, \ell)$  alors que l'énergie de fissuration est la fonction d'une variable  $D(\ell)$ ,  $\ell \mapsto P(t, \ell)$  est décroissante alors que  $\ell \mapsto D(\ell)$  est croissante. En supposant que ces fonctions sont dérivables, les trois items de la loi de Griffith s'écrivent comme suit

---

12. Par exemple en 3D, on peut envisager le cas d'une fissure plane circulaire qui se propage en restant circulaire. Dans ce cas on peut prendre pour  $\ell$  le rayon  $R$  de la fissure, mais on pourrait tout aussi bien choisir  $\ell$  comme étant l'aire de la fissure, *i.e.*  $\ell = \pi R^2$

$$\begin{aligned}
\text{Irréversibilité} & : \dot{\ell}(t) \geq 0 \\
\text{Stabilité} & : -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \ell}(t, \ell(t)) \leq \frac{d\mathbf{D}}{d\ell}(\ell(t)) \\
\text{Bilan d'énergie} & : \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \ell}(t, \ell(t)) + \frac{d\mathbf{D}}{d\ell}(\ell(t)) \right) \dot{\ell}(t) = 0
\end{aligned}$$

### 8.4.3 Etat de fissuration dépendant de $n$ paramètres

C'est le cas en 2D où il y a  $n$  pointes de fissures susceptibles de se propager suivant un trajet prédéfini. Mais on peut le trouver en 3D si l'on restreint la forme de la fissure (en supposant par exemple qu'elle est elliptique et en prenant la longueur des deux axes pour paramètres). Si on note  $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n)$  les  $n$  paramètres, l'énergie potentielle est la fonction  $\mathbf{P}(t, \underline{\ell})$ , l'énergie de fissuration est la fonction  $\mathbf{D}(\underline{\ell})$ . Nous les supposons différentiables.

On se place dans la situation où chaque paramètre  $\ell_i$  représente une taille de fissure et la condition d'irréversibilité se traduit par

$$\text{Irréversibilité : } \dot{\ell}_i(t) \geq 0, \quad \forall i.$$

Formulons les deux autres items de la loi de Griffith basés sur les principes de stabilité et de conservation de l'énergie. Si on envisage une vitesse virtuelle d'évolution des paramètres  $\underline{v}$ , avec  $0 \leq v_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ , le taux de restitution d'énergie et le taux de création d'énergie de fissuration s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{G} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}(t)) v_i, \quad \mathbf{D}' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}(t)) v_i.$$

En vertu de la propriété 8.1.3 de décroissance de l'énergie potentielle à chargement fixé et la croissance de l'énergie de fissuration par rapport aux paramètres, on a donc :

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}) \leq 0, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}) \geq 0.$$

Le critère de stabilité dit que l'on doit avoir  $\mathbf{G} \leq \mathbf{D}'$  et ce pour tous les  $\underline{v}$  possibles, *i.e.*

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}(t)) v_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}(t)) v_i, \quad \forall \underline{v} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n v_i = 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{Stabilité : } -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}(t)) \leq \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}(t)), \quad \forall i.$$

Le bilan d'énergie s'écrit  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial P}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}(t)) + \frac{\partial D}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}(t)) \right) \dot{\ell}_i(t) = 0$ . Mais en tenant compte de l'irréversibilité et du critère de stabilité, il se réduit à

$$\boxed{\text{Bilan d'énergie : } \left( \frac{\partial P}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}(t)) + \frac{\partial D}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}(t)) \right) \dot{\ell}_i(t) = 0, \quad \forall i.}$$

#### 8.4.4 Propagation d'une fissure plane en 3D

Il s'agit de trouver l'évolution du front de fissure, *i.e.*  $t \mapsto \gamma(t)$ . L'énergie potentielle peut être vue comme une fonction de  $t$  et de  $\gamma$ , soit  $P(t, \gamma)$ . Supposons pour simplifier que le milieu est homogène, l'énergie de fissuration est alors donnée par  $D(\Gamma) = G_c \text{aire}(\Gamma)$ . En envisageant  $\zeta \mapsto v(\zeta)$ , avec  $v(\zeta) \geq 0$  et  $\int_{\gamma(t)} v(\zeta) d\zeta = 1$ , comme vitesse virtuelle de propagation du front à l'instant  $t$  suivant la normale au front (et dans le plan de la fissure), le taux de restitution d'énergie peut se mettre sous la forme  $\int_{\gamma(t)} G(t, \zeta) v(\zeta) d\zeta$ . Comme le taux de création d'énergie de fissuration est simplement  $G_c$ , le critère de stabilité demande que

$$\int_{\gamma(t)} G(t, \zeta) v(\zeta) d\zeta \leq G_c, \quad \forall v \geq 0, \quad \int_{\gamma(t)} v(\zeta) d\zeta = 1,$$

ce qui est équivalent à  $G(\zeta) \leq G_c, \forall \zeta$ . Si l'on note  $\dot{\ell}(\zeta)$  la vitesse normale réelle de propagation du front au point  $\zeta$ , les 3 items s'écrivent donc (à chaque instant)

$$\begin{aligned} \text{Irréversibilité} & : \dot{\ell}(\zeta) \geq 0, \quad \forall \zeta \\ \text{Stabilité} & : G(\zeta) \leq G_c, \quad \forall \zeta \\ \text{Bilan d'énergie} & : (G(\zeta) - G_c) \dot{\ell}(\zeta) = 0, \quad \forall \zeta. \end{aligned}$$

En résumé, dans la théorie de Griffith de la rupture fragile, la propagation des fissures est régie par trois principes : (i) un principe d'irréversibilité disant que la fissuration ne peut que croître ; (ii) un principe de stabilité disant que la fissure se propagera s'il existe une direction de propagation suivant laquelle la restitution d'énergie potentielle sera suffisante pour fournir l'énergie de fissuration correspondante ; (iii) un bilan d'énergie disant que lors de la propagation la restitution d'énergie potentielle est égale à la création d'énergie de surface. Ces principes s'appuient sur deux hypothèses relatives à la fissuration : (a) l'absence de forces de cohésion sur les lèvres des fissures ; (b) une densité surfacique d'énergie de fissuration ne dépendant que du matériau et de l'orientation de la fissure mais pas du saut des déplacements.

## Chapitre 9

# Etude de la théorie de Griffith

Munis de la loi de propagation de Griffith, on commence par montrer sur quelques exemples comment on peut effectivement calculer la charge de démarrage de la fissuration puis l'évolution de la fissuration avec le chargement. Ces exemples mettent en évidence des propriétés génériques que nous établissons ensuite dans un cadre plus large. Il ressort en particulier que l'évolution de la fissuration peut conduire à des scénarii beaucoup plus dramatiques que la plasticité, car il est fréquent d'observer des comportements sans écrouissage structurel mais adoucissants, la structure se rompant dès que l'on dépasse la charge de démarrage de la fissure préexistante.

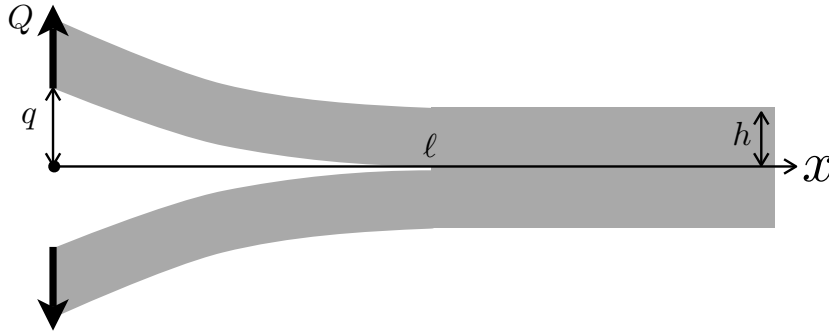
La question du trajet des fissures n'a pas encore reçu à ce jour une réponse générale. Nous nous limiterons au cadre des structures en élasticité plane avec matériau isotrope pour lesquelles le critère de stabilité fournit des conditions que doit remplir le trajet d'une fissure. Enfin, nous terminons ce chapitre sur une courte présentation des défauts et des lacunes de la loi de Griffith en donnant quelques indications sur comment on peut corriger les uns et combler les autres.

## 9.1 Exemples de propagation suivant la loi de Griffith

Dans cette section, nous traitons quelques exemples simples de propagation de fissures suivant la loi de Griffith. Ils feront apparaître des propriétés à caractère générique que nous établirons dans un cadre élargi dans la section suivante. La principale difficulté dans la mise en œuvre de la loi de Griffith réside dans le calcul de l'énergie potentielle en fonction du ou des paramètres de fissuration. En général, ce calcul n'est pas exact et l'on a recours à des approximations soit par le biais du calcul numérique, soit par des hypothèses simplificatrices sur la forme des champs de déplacement et de contraintes.

### EXEMPLE 1 : Essai DCB (Double Cantilever Beam).

Cet essai consiste à écarter progressivement les lèvres d'une fissure pré-usinée dans une poutre. On pilote en déplacement et au delà d'un certain seuil du déplacement contrôlé, la fissure se propage. Dans l'essai, on mesure sa longueur en fonction du paramètre de contrôle. Ici, nous allons la calculer à l'aide de la théorie de Griffith et on montrera pourquoi il faut piloter en déplacement et pas en force.



La poutre est de longueur  $L$ , de section rectangulaire, d'épaisseur  $d$  et de demi-hauteur  $h$ . C'est un problème 3D que nous allons ramener à un problème 1D. On suppose que la fissure reste dans le plan de symétrie et que son front reste rectiligne. On note  $\ell$  la longueur de la fissure,  $x$  la coordonnée longitudinale, l'origine étant prise à l'extrémité gauche. L'énergie potentielle se calcule de façon approchée en utilisant la théorie des poutres. Si  $Q$  désigne la force exercée à l'extrémité gauche de la branche supérieure de la poutre, le moment fléchissant  $M(x)$  en  $x \in (0, \ell)$  dans la branche supérieure de la poutre vaut donc  $Qx$ . On change les signes dans la branche inférieure. L'énergie élastique dans chacune des deux branches est l'énergie de flexion et vaut

$$\mathcal{W} = \int_0^\ell \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{Q^2 \ell^3}{6EI}$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau et  $I = h^3 d/12$  est le moment d'inertie géométrique de la demi-section de la poutre. L'énergie élastique dans la partie non fissurée de la poutre est négligeable. Le déplacement transversal (la déflexion)  $q$  de l'extrémité gauche de la branche supérieure est reliée à la force  $Q$  par

$$Q = 3EI \frac{q}{\ell^3} = \frac{Eh^3 dq}{4\ell^3}. \quad (9.1)$$

Distinguons maintenant le cas où l'on contrôle le déplacement  $q$  de celui où on contrôle la force  $Q$ .

**Déplacement contrôlé.** On prend  $q$  comme paramètre de chargement croissant depuis 0, *i.e.*  $q = t$ . Dans ce cas l'énergie potentielle est égale à l'énergie élastique et on a donc (en multipliant par 2 du fait des deux branches de la poutre) :

$$P(t, \ell) = Eh^3 \frac{dt^2}{4\ell^3}.$$

On en déduit le taux de restitution d'énergie potentielle

$$G(t, \ell) = -\frac{1}{d} \frac{\partial P}{\partial \ell}(t, \ell) = \frac{3Eh^3 t^2}{4\ell^4},$$

où on a divisé par l'épaisseur de la poutre pour avoir une énergie par unité de surface. L'énergie de fissuration est donnée par  $D(\ell) = G_c d \ell$  et le taux de création est simplement  $G_c$ . La loi de Griffith s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Irréversibilité} & : \dot{\ell}(t) \geq 0 \\ \text{Stabilité} & : 4G_c \ell(t)^4 \geq 3Eh^3 t^2 \\ \text{Bilan d'énergie} & : (4G_c \ell(t)^4 - 3Eh^3 t^2) \dot{\ell}(t) = 0 \end{array} \right.$$

avec la condition initiale  $\ell(0) = \ell_0 > 0$ . Construisons une solution. Soit  $q_c = \sqrt{\frac{4G_c \ell_0^4}{3Eh^3}}$ . Pour  $t < q_c$  on a nécessairement en vertu de l'irréversibilité

$$4G_c \ell(t)^4 \geq 4G_c \ell_0^4 = 3Eh^3 q_c^2 > 3Eh^3 t^2$$

et donc, d'après le bilan d'énergie,  $\dot{\ell}(t) = 0$ . Par conséquent,  $\ell(t) = \ell_0$  pour  $0 \leq t \leq q_c$ . À l'instant  $q_c$ , le critère de stabilité est vérifié comme une égalité. Envisageons la solution telle que cela reste vrai pour  $t > q_c$ . On aura donc

$$\ell(t) = \ell_0 \sqrt{\frac{t}{q_c}}. \quad (9.2)$$

Comme c'est une fonction croissance de  $t$ , toutes les conditions sont satisfaites et on a donc construit une solution. Il est possible de montrer que c'est la seule solution continue. Nous reviendrons sur ce point lors de l'établissement des propriétés générales.

En résumé, on a donc montré que, sous déplacement contrôlé, la fissure ne se propage pas tant que le déplacement contrôlé reste inférieur à la valeur critique  $q_c$ , puis se propage continûment au-delà. L'évolution de la longueur de la fissure est en  $\sqrt{q}$ .

**Force contrôlée.** Prenons la force  $Q$  comme paramètre de chargement croissant depuis 0, *i.e.*  $Q = t$ . Dans ce cas l'énergie potentielle est égale à l'énergie élastique moins le travail de la force. Comme ce travail est égal au double de l'énergie élastique (formule de Clapeyron), l'énergie potentielle est l'opposée de l'énergie élastique. En l'exprimant en termes de la force, on a donc

$$P(t, \ell) = -\frac{4t^2 \ell^3}{Eh^3 d}, \quad G(t, \ell) = -\frac{1}{d} \frac{\partial P}{\partial \ell}(t, \ell) = \frac{12t^2 \ell^2}{Eh^3 d^2}.$$



La loi de Griffith s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \text{Irréversibilité} & : \dot{\ell}(t) \geq 0 \\ \text{Stabilité} & : 12t^2\ell(t)^2 \leq G_c E h^3 d^2 \\ \text{Bilan d'énergie} & : (12t^2\ell(t)^2 - G_c E h^3 d^2)\dot{\ell}(t) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$Q_c = \sqrt{\frac{G_c E h^3 d^2}{12\ell_0^2}},$$

montrons que la seule solution continue possible est telle que la fissure ne se propage pas tant que  $t < Q_c$ . En effet, pour  $t$  assez petit, on a  $12t^2\ell(t)^2 < G_c E h^3 d^2$  et donc d'après le bilan d'énergie  $\dot{\ell}(t) = 0$ . Donc  $\ell(t) = \ell_0$  pour  $t$  assez petit. Cela reste vrai tant que  $12t^2\ell_0^2 < G_c E h^3 d^2$  et donc tant que  $t < Q_c$ . Par continuité, on peut prendre  $\ell(Q_c) = \ell_0$ . Montrons qu'il n'existe plus de solution à la loi d'évolution de Griffith pour  $t > Q_c$ . En effet, d'après la condition d'irréversibilité, on doit avoir  $\ell(t) \geq \ell_0$  et donc  $12t^2\ell(t)^2 > 12Q_c^2\ell_0^2 = G_c E h^3 d^2$ , le critère de stabilité ne peut donc plus être satisfait.

En résumé, on a donc montré que, sous force contrôlée, la fissure ne se propage pas tant que la force reste inférieure à la valeur critique  $Q_c$ , et se propage de façon instable au-delà. La charge  $Q_c$  est la charge maximale que peut supporter la poutre DCB.

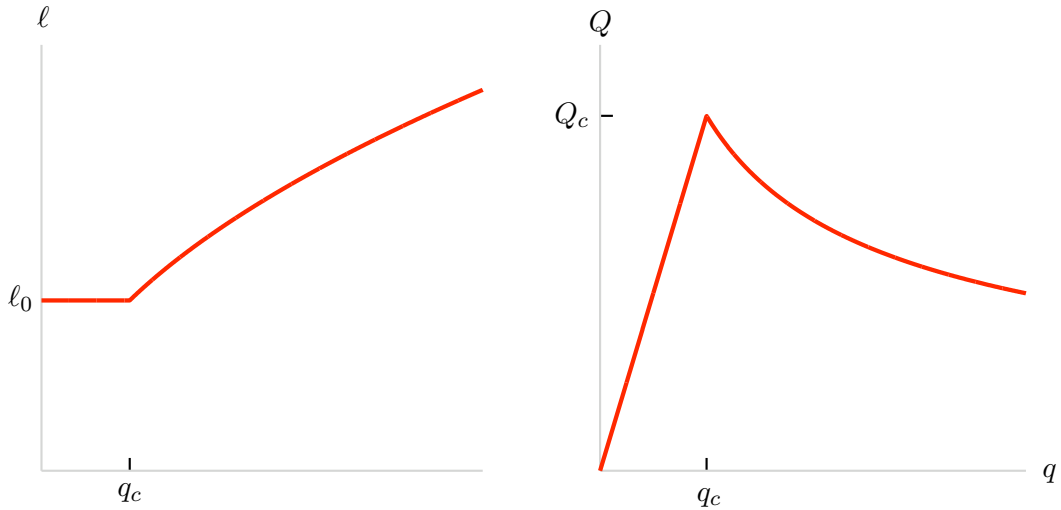


FIGURE 9.1 – Réponse de la poutre DCB sous déplacement contrôlé. À gauche, évolution de la fissure en fonction du déplacement ; à droite, évolution de la force associée en fonction du déplacement. Noter le phénomène d'adoucissement, *i.e.* la diminution de la force durant la phase d'évolution de la fissure.

Cette notion de charge limite est visible sur le diagramme  $(q, Q)$  lorsqu'on travaille à déplacement

contrôlé et que l'on mesure ou calcule la force. En effet en injectant (9.2) dans (9.1), on obtient

$$Q = \begin{cases} Q_c \frac{q}{q_c} & \text{si } q \leq q_c \\ Q_c \sqrt{\frac{q_c}{q}} & \text{si } q > q_c \end{cases}$$

où on voit que la force décroît au fur et à mesure que la fissure avance. Autrement dit, on a affaire à un phénomène d'*adoucissement*. Il est intéressant de remarquer que plus la fissure initiale est courte et plus la charge critique est élevée,  $Q_c$  tendant vers l'infini comme  $1/\ell_0$  quand  $\ell_0$  tend vers 0. Toutefois, cette vitesse de croissance vers l'infini est obtenue dans le cadre simplifié de la théorie des poutres. On obtiendrait un autre résultat en 3D.

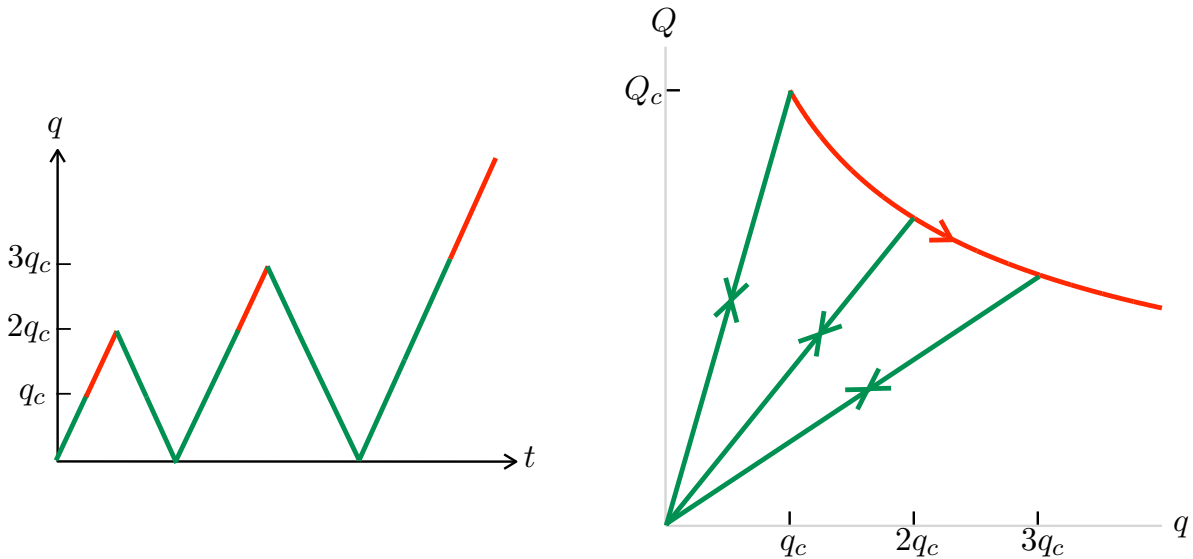


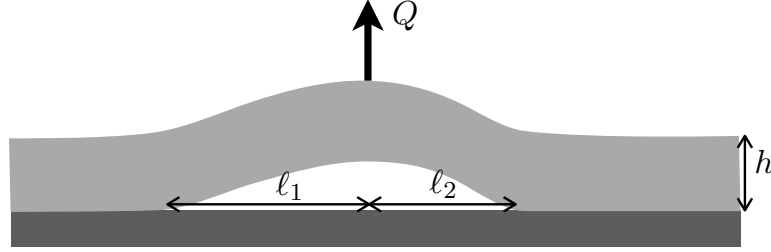
FIGURE 9.2 – Réponse de la poutre DCB sous un déplacement contrôlé non monotone.

Il est également intéressant d'étudier la réponse sous un chargement à déplacement contrôlé qui ne soit pas monotone. Supposons que l'on fasse tout d'abord croître  $q$  de 0 à  $q_1 > q_c$ , puis que l'on fasse décroître jusqu'à 0, avant de le faire croître à nouveau jusqu'à  $q_2 > q_1$ , etc. On peut montrer (cf Exercice 9.1) que durant les phases de décharge la fissure n'évolue pas et durant les phases de recharge elle n'évolue pas non plus tant que le déplacement n'a pas dépassé la valeur maximale passée. Ces phases de décharge-recharge sont réversibles et la relation  $Q$ - $q$  est linéaire, mais avec une pente qui dépend de l'état de fissuration : plus la fissure est longue, plus la pente est faible. La rigidité apparente de la poutre décroît. Dans les phases de surcharge (quand le déplacement imposé est plus grand que les déplacements antérieurs), l'évolution de la fissuration est la même que lors d'un chargement monotone. Finalement, la réponse de la poutre dans un diagramme  $(q, Q)$  a l'allure indiquée sur la Figure 9.2. On notera les différences essentielles avec un comportement élasto-plastique qui se manifestent par l'absence de déformations résiduelles, la perte de rigidité progressive et le phénomène d'adoucissement (diminution de la force).

**Exercice 9.1.** Justifier rigoureusement à partir de la loi de Griffith la réponse force-déplacement représentée sur la Figure 9.2 pour la poutre DCB sous un chargement non monotone à déplacement contrôlé.

**EXEMPLE 2 : Décollement d'un revêtement.** C'est un exemple où la fissuration est définie par deux paramètres.

Un revêtement élastique d'épaisseur  $h$  est décollé de son support (supposé rigide) en exerçant en un point de sa surface extérieure une force  $Q$  ou un déplacement  $q$  croissant dans la direction orthogonale au support. On suppose que le décollement a lieu uniformément sur toute la largeur du revêtement. On note  $\ell_1$  et  $\ell_2$  les positions des fronts de décollement situés de part et d'autre du point d'application du chargement. Les longueurs initiales de décollement sont  $\ell_1^0$  et  $\ell_2^0$ . On se propose de calculer l'évolution des fronts à l'aide de la théorie de Griffith en distinguant le cas où l'on pilote en déplacement de celui où on pilote en force.



Comme dans l'exemple précédent, le calcul de l'énergie élastique est fait à partir de la théorie des poutres. Après un calcul qui ne sera pas détaillé, on obtient que la force  $Q$  et le déplacement associé  $q$  sont liés par

$$Q = \frac{1}{4} E h^3 d \left( \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right)^3 q. \quad (9.3)$$

**Déplacement contrôlé.** On prend  $q$  comme paramètre de chargement croissant depuis 0, *i.e.*  $q = t$ . Dans ce cas l'énergie potentielle est égale à l'énergie élastique qui est elle-même égale à  $Qq/2$ . On a donc :

$$P(t, \ell_1, \ell_2) = \frac{1}{8} E h^3 d \left( \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right)^3 t^2, \quad D(\ell_1, \ell_2) = G_c d (\ell_1 + \ell_2).$$

Les deux taux de restitution d'énergie potentielle sont donnés par

$$G_i(t, \ell_1, \ell_2) = \frac{3}{8} E h^3 d \left( \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right)^2 \frac{t^2}{\ell_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Le plus grand des deux correspond donc au côté le moins décollé. Ecrivons la loi de Griffith :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Irréversibilité} & : \quad \dot{\ell}_1(t) \geq 0, \quad \dot{\ell}_2(t) \geq 0 \\ \text{Stabilité} & : \quad G_1(t, \ell_1(t), \ell_2(t)) \leq G_c, \quad G_2(t, \ell_1(t), \ell_2(t)) \leq G_c \\ \text{Bilan d'énergie} & : \quad G_1(t, \ell_1(t), \ell_2(t)) \dot{\ell}_1(t) + G_2(t, \ell_1(t), \ell_2(t)) \dot{\ell}_2(t) = G_c (\dot{\ell}_1(t) + \dot{\ell}_2(t)). \end{array} \right.$$

avec la condition initiale  $\ell_i(0) = \ell_i^0$ . Supposons que  $\ell_2^0 > \ell_1^0$ . Comme on cherche une évolution continue en temps, pour  $t$  assez petit on a  $G_1$  et  $G_2$  inférieurs (strictement) à  $G_c$  et donc le décollement n'évolue pas. Comme  $G_2 < G_1$  durant cette période, c'est  $G_1$  qui atteindra le premier la valeur  $G_c$ . Ceci a lieu à l'instant où le déplacement vaut  $q_1$ ,

$$q_1 = \sqrt{\frac{8G_c}{3Eh^3}} \frac{\ell_1^0}{\frac{1}{\ell_1^0} + \frac{1}{\ell_2^0}}.$$

Plaçons-nous à  $t$  légèrement supérieur à  $q_1$ . Au moins un des deux côtés doit se décoller, car sinon on violerait le critère de stabilité. Montrons que seul  $\ell_1$  évolue. En effet, pour  $t$  assez proche de  $q_1$  on a encore par continuité  $G_2 < G_c$ . Mais comme  $G_1$  ne peut pas dépasser  $G_c$  on aura  $G_1\dot{\ell}_1 + G_2\dot{\ell}_2 < G_c(\dot{\ell}_1 + \dot{\ell}_2)$  si  $\dot{\ell}_2 > 0$ , ce qui contredit le bilan d'énergie. Donc  $\dot{\ell}_2 = 0$ .

Pour  $t$  assez proche (mais plus grand) que  $q_1$ , seul  $\ell_1$  évolue et donc d'après le bilan d'énergie  $G_1 = G_c$ . Cette équation nous permet de calculer  $\ell_1(t)$  :

$$\ell_1(t) = \frac{2\ell_2^0}{\sqrt{1 + 4\frac{\ell_2^0}{\ell_1^0} \left( \frac{\ell_2^0}{\ell_1^0} + 1 \right) \frac{q_1}{t} - 1}} \quad \text{si } t \in [q_1, q_2]. \quad (9.4)$$

Durant cet intervalle de temps  $G_2$  croît tout en restant inférieur à  $G_c$ . Il atteindra la valeur  $G_c$  quand  $t = q_2$  et à cet instant on aura  $G_1 = G_2 = G_c$  et donc  $\ell_1 = \ell_2^0$ . D'où

$$q_2 = \frac{\ell_2^0}{\ell_1^0} \left( \frac{\ell_2^0}{\ell_1^0} + 1 \right) \frac{q_1}{2}.$$

Pour  $t > q_2$ , on peut chercher une solution "symétrique" où les deux côtés du décollement avancent à la même vitesse. En écrivant que  $\ell_1 = \ell_2$  et que  $G_1 = G_2 = G_c$ , on trouve immédiatement

$$\ell_1(t) = \ell_2(t) = \ell_2^0 \sqrt{\frac{t}{q_2}} \quad \text{si } t > q_2.$$

Comme l'irréversibilité est respectée, cette solution est admissible. On a donc construit une solution au problème d'évolution. Par construction, elle est unique jusqu'à  $t = q_2$ . Il resterait à démontrer qu'elle est unique après, ce qui est du ressort des propriétés générales que nous établirons dans la prochaine section. Cette solution est représentée sur la figure 9.3.

**Force contrôlée.** On peut voir directement sur le diagramme  $(q, Q)$  le comportement sous force contrôlée. Pour cela calculons l'évolution de la force  $Q$  durant l'évolution du décollement à déplacement contrôlé. Avant le démarrage du décollement, la force est proportionnelle au déplacement. Au moment où le décollement démarre, la force vaut  $Q_1$  :

$$Q_1 = \sqrt{\frac{1}{6}Eh^3} \left( \frac{1}{\ell_1^0} + \frac{1}{\ell_2^0} \right)^2 \ell_1^0 d.$$

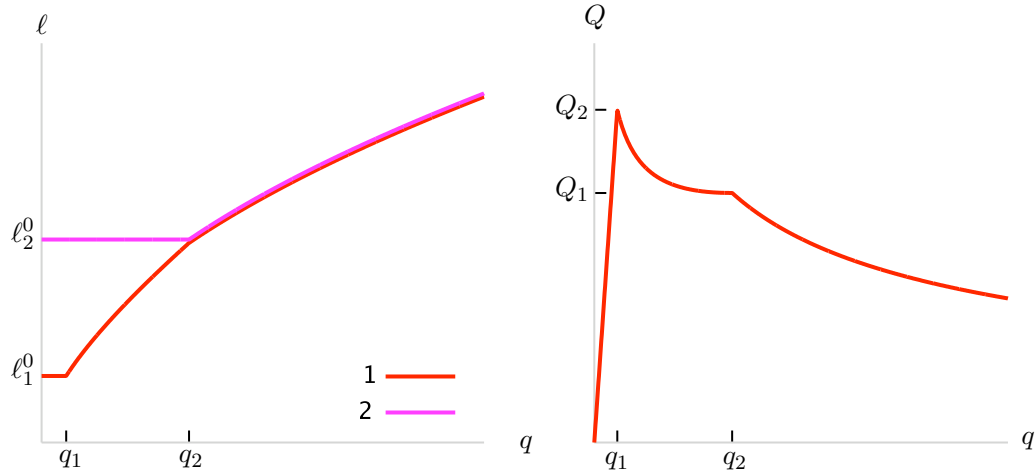


FIGURE 9.3 – Solution du problème de décollement d’un revêtement. À gauche, évolution des deux fronts en fonction du déplacement imposé; à droite, évolution de la force associée en fonction du déplacement imposé.

Durant la phase de décollement du côté gauche seul, en injectant (9.4) dans (9.3), on obtient

$$Q = Q_1 \frac{q}{q_1} \left( \frac{\sqrt{1 + a \frac{q_1}{q}} + 1}{\sqrt{1 + a} + 1} \right)^3, \quad a = 4 \frac{\ell_2^0}{\ell_1^0} \left( \frac{\ell_2^0}{\ell_1^0} + 1 \right) \quad \text{si} \quad q_1 \leq q \leq q_2.$$

Durant la phase où les deux fronts avancent à la même vitesse, on a

$$Q = Q_2 \sqrt{\frac{q_2}{q}}, \quad Q_2 = \frac{4\ell_2^0/\ell_1^0}{(\ell_2^0/\ell_1^0 + 1)^2} Q_1 \quad \text{si} \quad q > q_2.$$

On voit donc (cf Figure 9.3) que  $Q$  décroît durant les deux phases de décollement. Tout d’abord de  $Q_1$  à  $Q_2$ , puis de  $Q_2$  à 0. Le décollement est *adoucissant*. Par conséquent  $Q_1$  est la force maximale que peut équilibrer le revêtement si son décollement suit la loi de Griffith. Si l’on dépasse cette valeur, le décollement se déroulera de façon instable.

**EXEMPLE 3 : Essai SENB de flexion 3 points.** Ce dernier exemple est la simulation de l’essai SENB servant à mesurer la ténacité. On impose le déplacement  $q$  du point central et on calcule la force associée  $Q$  en supposant que l’évolution de la fissuration suit la loi de Griffith<sup>1</sup>. Ici compte tenu des dimensions massives de la poutre, on ne peut pas utiliser les formules simplifiées de la théorie des

1. D’un point de vue théorique, une force ponctuelle en 2D engendre une singularité telle que les déplacements ne sont plus d’énergie finie. De même, on ne peut pas imposer le déplacement d’un point de la frontière. Cela conduit à un problème mal posé. Numériquement, on contourne cette difficulté en étalant la donnée de la force ou du déplacement sur les côtés des éléments situés sur la frontière de part et d’autre du point d’application.

poutres pour obtenir une bonne approximation de la relation entre  $Q$  et  $q$  pour différentes longueurs de fissure. On va donc utiliser la méthode des éléments finis.

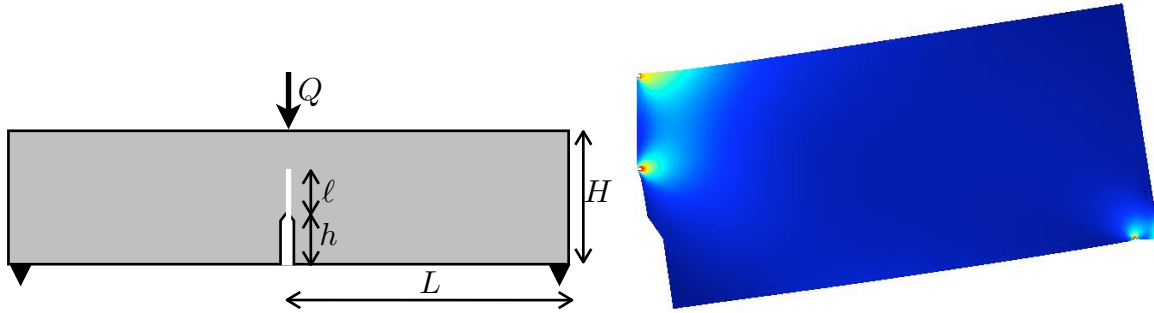


FIGURE 9.4 – À gauche, géométrie de la poutre ; à droite, la déformée de la moitié droite, calculée par la méthode des éléments finis, pour une fissure de longueur  $H/5$ .

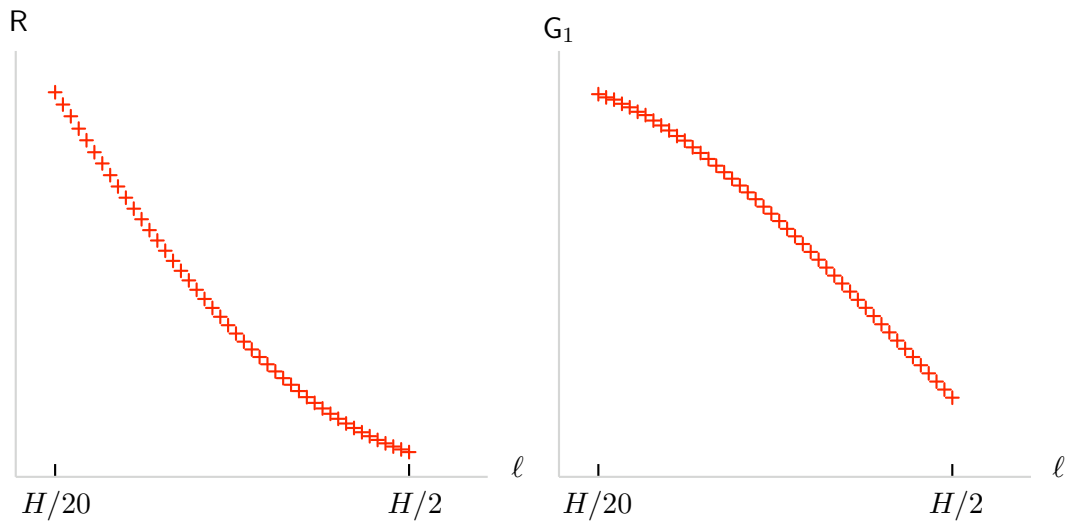


FIGURE 9.5 – Rigidité effective et taux de restitution d'énergie potentielle calculés pour différentes longueurs de fissure dans l'essai de flexion 3 points de la poutre soumise à un déplacement unitaire du point central (l'échelle de valeurs n'a pas d'importance, seules les variations relatives des quantités comptent). On notera la décroissance de  $G_1$  sur la plage de valeurs calculées.

On se place en déformations planes et les calculs sont faits avec les valeurs numériques suivantes. Si  $H$  désigne la hauteur de l'éprouvette de flexion, on prend la demi-longueur  $L = 2H$ , la hauteur de l'entaille  $h = 0.4H$ , l'épaisseur de l'entaille  $e = H/10$ . Le coefficient de Poisson du matériau vaut  $\nu = 0.33$ . Par raison de symétrie, les calculs se font sur une demi-éprouvette. On utilise un maillage triangulaire avec interpolation quadratique, le maillage dépendant de l'état de fissuration de la poutre. Un maillage typique conduit à environ quelques milliers de degrés de liberté (on peut aller jusqu'à quelques dizaines de milliers de degrés de liberté lorsqu'on raffine les zones singulières). Les calculs

sont faits pour des longueurs de fissure allant de  $H/20$  à  $H/2$  par pas de  $H/100$ , les calculs devenant imprécis pour les petites longueurs de fissure ou pour des petites longueurs du ligament non fissuré sur l'axe central. On impose un déplacement  $q$  unitaire et on calcule pour chaque longueur  $\ell$  de la fissure l'énergie potentielle  $P_1(\ell)$  ainsi que le taux de restitution d'énergie  $G_1(\ell) = -P_1'(\ell)$ . Le calcul de  $G_1(\ell)$  est fait en utilisant la méthode  $G-\theta$ . Le calcul de  $P_1(\ell)$  permet d'accéder à la rigidité  $R(\ell)$  de la poutre fissurée,  $R(\ell) = 2P_1(\ell)$ . On peut alors obtenir la relation force-déplacement :

$$Q = R(\ell)q, \quad 2G_1(\ell) = -R'(\ell).$$

Munis de ces valeurs numériques de la rigidité et de sa dérivée par rapport à  $\ell$ , nous pouvons calculer l'évolution de la fissuration prévue par la loi de Griffith lors d'un essai à déplacement contrôlé croissant du point central. En posant  $q = t$ , il s'agit donc de trouver  $t \mapsto \ell(t)$  continu et croissant depuis  $\ell_0 = H/20$  tel que

$$G_1(\ell(t))t^2 \leq G_c, \quad (G_1(\ell(t))t^2 - G_c)\dot{\ell}(t) = 0.$$

Pour  $t$  assez petit, on a  $G_1(\ell(t))t^2 < G_c$  et donc  $\ell(t) = \ell_0$ . Ceci est vrai tant que  $G_1(\ell_0)t^2 \leq G_c$ , ce qui fournit la charge de démarrage  $q_c$  de la fissure :

$$q_c = \sqrt{\frac{G_c}{G_1(\ell_0)}}.$$

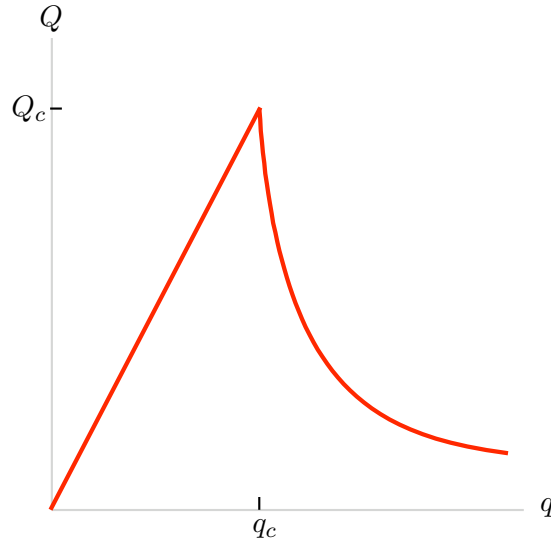


FIGURE 9.6 – Réponse de la poutre sous déplacement contrôlé croissant dans un diagramme force-déplacement prédite par la loi de Griffith. À noter le fort adoucissement.

Pour  $t \geq q_c$ , on a nécessairement  $G_1(\ell(t))t^2 = G_c$  du fait que  $G_1$  est une fonction décroissante de  $\ell$ . (Cette propriété générale sera démontrée dans la prochaine section.) Ceci fournit l'équation permettant de calculer  $\ell(t)$ . En inversant  $\ell \mapsto G_1(\ell)$ , on obtient  $\ell(t) = G_1^{-1}(G_c/t^2)$ . Il suffit alors d'insérer cette expression dans la relation force-déplacement  $Q = R(\ell(t))t$  pour obtenir la force  $Q$ . Notons que la

courbe force-déplacement durant la phase de propagation de la fissure peut être paramétrée par la longueur de la fissure :

$$q = \sqrt{\frac{G_c}{G_1(\ell)}}, \quad Q = R(\ell) \sqrt{\frac{G_c}{G_1(\ell)}}.$$

## 9.2 Quelques propriétés générales

On se propose de montrer que certaines propriétés vues sur les exemples précédents ont en fait une portée générale. Pour cela, nous supposons que le chargement est défini par un paramètre qui sera soit du type déplacement généralisé  $q$  dont la force généralisée associée est  $Q$ , soit du type force généralisée  $Q$  dont le déplacement associé est  $q$ . Ce paramètre dépendra du temps, voire sera le paramètre de temps, et prendra des valeurs positives ou nulles. Considérons le cas où ce paramètre est un déplacement  $q$ . Comme nous négligeons les frottements entre les lèvres des fissures, les déplacements  $\underline{\xi}(q, \Gamma)$  équilibrant la structure dans l'état de fissuration  $\Gamma$  sous le chargement d'intensité  $q$  dépend linéairement de  $q$  et peut donc s'écrire  $\underline{\xi}(q, \Gamma) = q \underline{\xi}^1(\Gamma)$ ,  $\underline{\xi}^1(\Gamma)$  représentant donc le déplacement d'équilibre sous chargement unitaire. L'énergie potentielle dépend de  $q$  de façon quadratique et on peut l'écrire

$$P(q, \Gamma) = \frac{1}{2} R(\Gamma) q^2,$$

$R(\Gamma)$  représentant la rigidité effective de la structure dans l'état de fissuration  $\Gamma$ . Son inverse  $S(\Gamma) = 1/R(\Gamma)$  est la souplesse effective de la structure. À l'équilibre la force généralisée  $Q$  est donnée par

$$Q = R(\Gamma) q.$$

Si l'on inverse la méthode de contrôle en ne contrôlant plus le déplacement généralisé  $q$  mais la force généralisée  $Q$ , alors l'énergie potentielle à l'équilibre devient la différence entre l'énergie élastique et le travail de la force par le déplacement. Autrement dit, on a alors  $P = \frac{1}{2} S(\Gamma) Q^2 - Qq$ . Mais comme on a aussi  $Qq = S(\Gamma) Q^2$ , l'énergie potentielle s'écrit finalement

$$P(Q, \Gamma) = -\frac{1}{2} S(\Gamma) Q^2.$$

Dans tous les cas, l'énergie potentielle dépend de façon quadratique du paramètre de chargement. Par conséquent, sous chargement monotone (que ce soit à déplacement ou à force contrôlée), si on note  $t$  le paramètre de chargement, l'énergie totale de la structure peut s'écrire

$$\mathcal{E}(t, \Gamma) = t^2 P_1(\Gamma) + D(\Gamma).$$

Rappelons que l'énergie potentielle  $P_1(\Gamma)$  est une fonction décroissante (au sens large) de  $\Gamma$  alors que l'énergie de fissuration  $D(\Gamma)$  est une fonction (strictement) croissante de  $\Gamma$ .



### 9.2.1 Démarrage de la propagation

La première utilisation naturelle de la loi de Griffith est de déterminer la valeur  $t_c$  du chargement au delà de laquelle la fissuration initiale doit nécessairement s'être propagée et en deçà de laquelle l'état de fissuration initial est stable. Cette valeur de démarrage ne nécessite qu'un calcul élastique donnant les déplacements et les contraintes sous un chargement "unitaire" couplé à un calcul du ou des taux de restitution d'énergie.

Ainsi si la fissuration ne dépend que d'un paramètre  $\ell$ , on a

$$P(t, \ell) = \frac{1}{2} P_1(\ell) t^2$$

et l'énergie de fissuration est  $D(\ell)$ . Le taux de restitution d'énergie vaut  $-\frac{1}{2} P'_1(\ell) t^2$  avec  $P'_1(\ell) \leq 0$  alors que le taux de création d'énergie de fissuration est  $D'(\ell) > 0$ . Tant que  $t$  est assez faible, la condition d'instabilité de Griffith n'est pas satisfaite et on a  $\ell = \ell_0$ . La valeur  $t_c$  de démarrage de la fissure initiale de paramètre  $\ell_0$  est obtenue en écrivant que le taux de restitution d'énergie potentielle est égal au taux de création d'énergie de fissuration, *i.e.*

$$t_c = \sqrt{\frac{2D'(\ell_0)}{-P'_1(\ell_0)}}.$$

Cette valeur est finie dans la mesure où  $P'_1(\ell_0) \neq 0$ . C'est évidemment le calcul de  $P'_1(\ell_0)$  qui est en général le plus délicat et peut nécessiter l'utilisation de méthodes numériques spécifiques telle la méthode  $G-\theta$  présentée au chapitre précédent. Connaissant  $t_c$  on en déduit la valeur  $q_c$  ou  $Q_c$  du déplacement ou de la force associé de démarrage :  $Q_c = R(\ell_0)q_c$ .

Dans le cas d'une fissuration à  $n$  paramètres, les énergies deviennent

$$P(t, \underline{\ell}) = \frac{1}{2} P_1(\underline{\ell}) t^2, \quad D(\underline{\ell}).$$

Comme le critère de stabilité de Griffith exige que

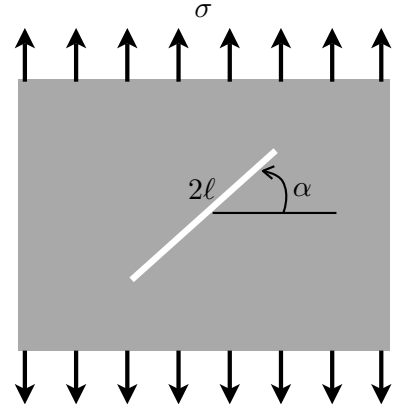
$$-\frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial \ell_j}(\underline{\ell}) t^2 \leq \frac{\partial D}{\partial \ell_j}(\underline{\ell}), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\},$$

la valeur de démarrage est donnée par

$$t_c = \min_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{2 \frac{\partial D}{\partial \ell_j}(\underline{\ell}_0)}{-\frac{\partial P_1}{\partial \ell_j}(\underline{\ell}_0)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui nécessite de calculer et de comparer les  $n$  taux de restitution d'énergie élémentaires.

**Exercice 9.2.** Calculer la contrainte critique  $\sigma_i$  à partir de laquelle se propage une fissure de longueur  $2\ell$  placée dans un milieu 2D infini et orientée d'un angle  $\pi/2 - \alpha$  par rapport à la direction de la sollicitation uniaxiale  $\sigma$  exercée à l'infini. On se placera en déformations planes, on supposera que la propagation est rectiligne et on distinguera les cas suivant que  $\sigma > 0$  (traction) ou  $\sigma < 0$  compression. Déterminer quelle est la pire orientation possible dans chaque cas. Comparer les contraintes critiques de traction et de compression.



### 9.2.2 Effets d'échelle

Le critère de propagation de Griffith consiste à comparer l'énergie potentielle qui est volumique avec l'énergie de fissuration qui est surfacique. Il y a forcément une longueur interne qui apparaît. Ainsi le rapport  $G_c/E$  pour un matériau isotrope a la dimension d'une longueur. La conséquence est que des *effets d'échelle* sont automatiquement présents dans le processus d'évolution de la fissuration. Il suffit de regarder les exemples précédents pour les mettre en évidence. Considérons l'essai DCB et analysons l'évolution de la fissuration en fonction des dimensions de la poutre. Pour cela, multiplions toutes les longueurs (hauteur  $h$ , largeur  $d$  et longueur initiale de fissure  $\ell_0$ ) par un paramètre  $\alpha$ , sans toucher aux constantes du matériau. On voit que la force de démarrage  $Q_c$  varie comme  $\alpha^{3/2}$ . La contrainte critique  $\sigma_c = Q_c/hd$  varie comme  $\alpha^{-1/2}$ . Autrement dit, si l'on multiplie toutes les dimensions par 4, on provoquera la rupture brutale de la poutre pour une contrainte deux fois plus faible. Cette dépendance à la taille se retrouve dans tous les exemples traités. Elle est en fait intrinsèque au cadre de la théorie de Griffith et tout particulièrement aux hypothèses faite sur l'énergie de fissuration et sur l'absence de forces de cohésion. On peut considérer que cet effet d'échelle ne représente qu'imparfaitement la réalité, surtout aux petites échelles. Il fait partie des défauts de la théorie qu'il faut corriger.

### 9.2.3 Propagation progressive ou propagation brutale

Les exemples de la section précédente montrent qu'il peut y avoir des cas où la fissuration se propage progressivement après la charge de démarrage et d'autres où au contraire elle est nécessairement instable. Ils semblent indiquer aussi que le risque d'instabilité est plus grand à force contrôlée qu'à déplacement contrôlé. On se propose ici de reconsidérer ces questions dans un cadre un peu plus général. Nous supposons toutefois que les énergies sont des fonctions régulières (au moins continûment différentiables) d'un seul paramètre  $\ell$ , ce qui exclut certains phénomènes. On a alors le résultat fondamental suivant

**Propagation progressive et minimisation de l'énergie.** *Sous les hypothèses :*

1. La structure est soumise à un chargement monotone
2. La fissuration ne dépend que d'un paramètre
3. Les fonctions  $\ell \mapsto P_1(\ell)$ ,  $\ell \mapsto D(\ell)$  sont continûment différentiables

on a les propriétés suivantes :

- (i) Le problème d'évolution de Griffith admet une solution  $t \mapsto \ell(t)$  continue dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  durant lequel la fissure croît de  $\ell_0$  à  $\ell_1$  si et seulement si le rapport  $-P'_1(\ell)/D'(\ell)$  est une fonction strictement décroissante de  $\ell$  sur l'intervalle  $[\ell_0, \ell_1]$ .
- (ii) Lorsque cette solution continue existe, alors elle est unique et, à chaque instant  $t$ ,  $\ell(t)$  minimise l'énergie totale  $\mathcal{E}(t, \ell) = t^2 P_1(\ell) + D(\ell)$  par rapport à  $\ell$  sur l'intervalle  $[\ell_0, \ell_1]$ .

PREUVE. Nous savons déjà d'après le paragraphe précédent que, dans l'intervalle de temps  $[0, t_c]$ , la seule solution continue est  $\ell(t) = \ell_0$  et que pour  $t > t_c$  on ne peut plus avoir  $\ell(t) = \ell_0$ . Supposons donc que  $T > t_c$  et  $\ell_1 > \ell_0$  sinon il n'y a plus rien à démontrer dans la première partie de la proposition.

*Etape 1.* Commençons par montrer l'implication que si une solution continue existe alors le rapport  $-P'_1(\ell)/D'(\ell)$  est une fonction strictement décroissante de  $\ell$ . Soit  $t \mapsto \ell(t)$  une solution continue. Montrons que  $-t^2 P'_1(\ell(t)) = D'(\ell(t))$  pour tout  $t \in [t_c, T]$ . C'est vrai à  $t = t_c$  par définition de  $t_c$ . Supposons que ce ne soit pas vrai pour un certain  $t_1$  et donc qu'à cet instant on ait  $-t_1^2 P'_1(\ell(t_1)) < D'(\ell(t_1))$  (l'inégalité inverse est impossible du fait de la condition de stabilité). Par continuité, ce serait vrai sur un intervalle de temps  $(t_0, t_1]$  avec  $t_c \leq t_0 < t_1$ . Prenons pour  $t_0$  la plus petite valeur possible. On a nécessairement l'égalité en  $t_0$  (puisque'il y a l'égalité en  $t_c$ ) et donc  $-t_0^2 P'_1(\ell(t_0)) = D'(\ell(t_0))$ . Mais du fait du bilan d'énergie,  $\ell$  ne peut pas varier dans l'intervalle  $[t_0, t_1]$  et on doit donc avoir  $\ell(t_0) = \ell(t_1)$ . Mais ceci fournit une contradiction, puisqu'on devrait avoir

$$t_0^2 \frac{-P'_1(\ell(t_0))}{D'(\ell(t_0))} = 1 > t_1^2 \frac{-P'_1(\ell(t_1))}{D'(\ell(t_1))} = t_1^2 \frac{-P'_1(\ell(t_0))}{D'(\ell(t_0))},$$

ce qui est impossible puisque  $t_0 < t_1$ . On a donc

$$-t^2 P'_1(\ell(t)) = D'(\ell(t)), \quad \forall t \in [t_c, T]. \quad (9.5)$$

Soient  $\ell_a$  et  $\ell_b$  tels que  $\ell_0 \leq \ell_a < \ell_b \leq \ell_1$ . Comme par hypothèse  $\ell(t)$  évolue continûment de  $\ell_0$  à  $\ell_1$  quand  $t$  varie de  $t_c$  à  $T$ , il existe deux instants  $t_a$  et  $t_b$  tels que  $\ell(t_a) = \ell_a$  et  $\ell(t_b) = \ell_b$ . Du fait de la condition d'irréversibilité on a  $t_a < t_b$ . En utilisant (9.5), il vient

$$\frac{-P'_1(\ell_a)}{D'(\ell_a)} = \frac{1}{t_a^2} > \frac{1}{t_b^2} = \frac{-P'_1(\ell_b)}{D'(\ell_b)}$$

qui montre la stricte décroissance du rapport.

*Etape 2.* Montrons que, réciproquement, si  $-P'_1(\ell)/D'(\ell)$  est une fonction continue strictement décroissante de  $\ell$  sur  $[\ell_0, \ell_1]$ , alors il existe une solution continue au problème d'évolution. En effet, posons  $T = \sqrt{-D'(\ell_1)/P'_1(\ell_1)}$  et introduisons la fonction inverse  $\mathcal{L}$  de  $-P'_1/D'$ ,  $\mathcal{L}$  est une fonction continue et strictement décroissante. Posons  $\ell(t) = \ell_0$  pour  $t \in [0, t_c]$  et  $\ell(t) = \mathcal{L}(1/t^2)$  pour  $t \in [t_c, T]$ . Quand  $t$  croît de  $t_c$  à  $T$ ,  $\ell(t)$  croît de  $\ell_0$  à  $\ell_1$  et vérifie  $-t^2 P'_1(\ell(t)) = D'(\ell(t))$ . Donc  $t \mapsto \ell(t)$  est bien une solution continue.

*Etape 3.* La solution est unique. En effet, il suffit de reprendre la démonstration de l'étape 1 où on a montré que toute solution continue devait vérifier  $-t^2 P'_1(\ell(t)) = D'(\ell(t))$  à chaque instant  $t \leq t_c$ . Cette équation détermine de façon unique  $\ell(t)$  quand  $-P'_1(\ell)/D'(\ell)$  est une fonction strictement décroissante de  $\ell$ .

*Etape 4.* Montrons que si  $-P'_1(\ell)/D'(\ell)$  est strictement décroissante, alors l'unique solution continue est aussi l'unique solution du problème de minimisation de l'énergie totale. Pour  $t = 0$ , on a  $\mathcal{E}(0, \ell) = D(\ell)$  et, comme  $D$  est strictement croissante,  $\ell_0$  est l'unique minimum. Pour  $t > 0$ , faisons le changement de variable  $\ell \mapsto d = D(\ell)$  (qui est licite puisque  $D$  est une fonction strictement croissante de  $\ell$ ). L'énergie totale devient alors, à  $t$  fixé, la fonction de  $d$  :

$$\hat{\mathcal{E}}(d) = t^2 P_1 \circ D^{-1}(d) + d$$

dont la dérivée est donnée par

$$\hat{\mathcal{E}}' \circ D(\ell) = t^2 \frac{P'_1(\ell)}{D'(\ell)} + 1.$$

Par conséquent, si le problème d'évolution de Griffith admet une solution continue, alors  $P'_1/D'$  est une fonction strictement décroissante de  $\ell$  et donc  $\hat{\mathcal{E}}'$  est une fonction strictement croissante de  $d$ , ce qui est équivalent à dire que  $\hat{\mathcal{E}}$  est une fonction strictement convexe de  $d$ . Etudions le problème de minimisation de cette fonction strictement convexe et continûment différentiable sur l'intervalle  $[d_0, d_1]$  avec  $d_i = D(\ell_i)$ . Le minimum est atteint en  $d_0$  si  $\hat{\mathcal{E}}'(d_0) \geq 0$ , en  $d_1$  si  $\hat{\mathcal{E}}'(d_1) \leq 0$  et en l'unique point  $d \in (d_0, d_1)$  tel que  $\hat{\mathcal{E}}'(d) = 0$  si  $\hat{\mathcal{E}}'(d_0) < 0 < \hat{\mathcal{E}}'(d_1)$ . Explicitons ces propriétés.

1. Le minimum est atteint en  $d_0$  (et donc en  $\ell_0$  en terme de la longueur de fissure) si  $t^2 P'_1(\ell_0) + D'(\ell_0) \leq 0$ , i.e. si  $t \leq t_c$  ;
2. Le minimum est atteint en  $d_1$  (et donc en  $\ell_1$  en terme de la longueur de fissure) si  $t^2 P'_1(\ell_1) + D'(\ell_1) \geq 0$ , i.e. si  $t \geq T$  ;
3. Le minimum est atteint en  $d$  (et donc en  $\ell$  en terme de la longueur de fissure) tel que  $t^2 P'_1(\ell) + D'(\ell) = 0$  si  $t \in (t_c, T)$ . Or cette équation en  $\ell$  est exactement la définition de la solution  $\ell(t)$  du problème d'évolution.

Donc  $\ell(t)$  est bien l'unique minimum de l'énergie totale à l'instant  $t$  sur l'intervalle  $[\ell_0, \ell_1]$ .  $\square$

**Remarque.** Cette propriété appelle quelques commentaires. On voit que le bon paramètre physique est le rapport entre le taux de restitution d'énergie potentielle et le taux de création d'énergie de fissuration, rapport qui quantifie la compétition entre les deux énergies. Si, à chargement fixé, ce rapport est décroissant par rapport à la longueur de la fissure, alors l'évolution de la fissuration est contrôlée. On pourra et il faudra augmenter le chargement pour accroître la fissuration. Par contre si ce rapport est croissant, alors l'évolution de la fissuration n'est plus contrôlable. Si l'on maintient le chargement, la fissure va se propager de façon brutale. Elle pourra ou non se stabiliser, sous ce même chargement, dans un nouvel état de fissuration. Dans les exemples traités dans la section précédente (poutre DCB, décollement d'un revêtement ou flexion 3 points), lorsqu'on travaille à force imposée, il n'est plus possible de retrouver un état de fissuration stable dès que l'on atteint la force critique  $Q_c$ . Mais on peut rencontrer des situations où la fissure va se propager brutalement mais pourra se stabiliser (cf l'exercice 9.4). Toutefois, la gestion de ces évolutions non continues n'est plus possible dans le cadre

de la loi de Griffith telle que nous l'avons écrite. Il faut généraliser les principes de stabilité et de bilan d'énergie pour pouvoir traiter de tels cas. On peut aussi légitimement se demander si ces phases de propagation discontinues par rapport au paramètre de chargement sont encore du ressort de l'approche quasi-statique sur laquelle s'appuie toute la démarche et s'il ne vaudrait pas mieux réintroduire la dynamique et les effets d'inertie. Cette question n'a pas reçu à ce jour de réponses définitives.

Bien que la propriété n'ait été établie que dans le cadre restreint où la fissuration dépend d'un seul paramètre, on peut espérer qu'elle reste vraie dans un cadre plus général. On propose, à titre d'exercice, de le vérifier dans le cas du problème de décollement d'un revêtement.

**Exercice 9.3.** Reprendre le problème de décollement d'un revêtement et vérifier que l'énergie totale est une fonction strictement convexe de  $(\ell_1, \ell_2)$ . Montrer que la solution trouvée minimise l'énergie totale, à  $t$  fixé, par rapport à  $(\ell_1, \ell_2)$  sur  $[\ell_1^0, \infty) \times [\ell_2^0, \infty)$ .

Appliquons la propriété précédente en distinguant les cas où l'on travaille à déplacement contrôlé de ceux où l'on travaille à force contrôlée. Pour simplifier, nous supposons que l'énergie de fissuration est proportionnelle à  $\ell$ , i.e.  $D(\ell) = G_c \ell$ , l'énergie totale devenant<sup>2</sup>

$$\mathcal{E}(q, \ell) = \frac{1}{2} R(\ell) q^2 + G_c \ell \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}(Q, \ell) = -\frac{1}{2} S(\ell) Q^2 + G_c \ell$$

suivant que l'on contrôle le déplacement  $q$  ou la force  $Q$ .

**Propagation progressive à force imposée.** Pour que l'évolution de la fissuration soit continue sous force imposée croissante, il faut et il suffit donc que  $S'(\ell)$  soit une fonction décroissante de  $\ell$ , autrement dit que la souplesse de la structure  $S$  soit une fonction *strictement concave* de la longueur de la fissure.

Propagation progressive à force imposée  $\iff$  Souplesse strictement concave

Quand cette condition est satisfaite, la fissure commence se propager quand

$$Q = Q_c = \sqrt{\frac{2G_c}{S'(\ell_0)}}.$$

Ensuite la longueur de la fissure  $\ell$  et le déplacement  $q$  sont donnés en fonction de la force  $Q$  par

$$\ell = (S')^{-1}(2G_c/Q^2), \quad q = S(\ell)Q.$$

Dans un diagramme force-déplacement, la réponse a donc l'allure de celle représentée dans la figure 9.7. Un tel comportement est dit *durcissant* ou *avec écrouissage*.

---

2. En fait, on peut toujours se ramener à cette situation dans le cas où la fissuration ne dépend que d'un paramètre en faisant le changement de variable  $\ell \mapsto d = D(\ell)$ . L'énergie s'écrit alors  $t^2 \hat{P}_1(d) + d$ . Ce changement de variable a de plus le mérite de faire apparaître la "bonne" quantité physique qu'est le rapport taux de restitution d'énergie potentielle sur taux de création d'énergie de fissuration.

**Propagation progressive à déplacement imposé.** Pour que l'évolution de la fissuration soit continue sous déplacement imposé croissant, il faut et il suffit que  $R'(\ell)$  soit une fonction croissante de  $\ell$ , autrement dit que la rigidité de la structure  $R$  soit une fonction *strictement convexe* de la longueur de la fissure.

$$\boxed{\text{Propagation progressive à déplacement imposé} \iff \text{Rigidité strictement convexe}}$$

Quand cette condition est satisfaite, la fissure commence se propager quand

$$q = q_c = \sqrt{\frac{-2G_c}{R'(\ell_0)}}.$$

Ensuite la longueur de la fissure  $\ell$  et la force  $Q$  sont données en fonction du déplacement  $q$  par

$$\ell = (R')^{-1}(-2G_c/q^2), \quad Q = R(\ell)q.$$

Comparons avec le cas où l'on contrôle la force. On a en fait l'implication suivante

$$S \text{ concave} \implies R \text{ convexe}.$$

En effet, comme  $R = 1/S > 0$ , on a  $R' = -S'/S^2$  et  $R'' = 2S'^2/S^3 - S''/S^2$ . Donc  $R'' > 0$  si  $S'' < 0$ . On a donc la propriété fondamentale suivante

$$\boxed{\text{Propagation progressive à force imposée} \implies \text{Propagation progressive à déplacement imposé}}$$

Mais la réciproque n'est pas vraie. Ceci peut aussi se voir dans la relation force-déplacement. Calculons  $dQ/dq$ , en utilisant que

$$q^2 R'(\ell) = -2G_c \quad \text{et} \quad 2q R'(\ell) + q^2 R''(\ell) \frac{d\ell}{dq} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dq} = R(\ell) + q R'(\ell) \frac{d\ell}{dq} = R(\ell) - 2 \frac{R'(\ell)^2}{R''(\ell)} = -R(\ell)^3 \frac{S''(\ell)}{R''(\ell)}.$$

On voit donc que si  $S$  est concave, alors  $R$  est convexe et la force croît, ce qui est conforme au résultat obtenu précédemment. Mais si  $S$  et  $R$  sont convexes, alors la force décroît. La réponse a donc l'allure de celle représentée dans la figure 9.7. Un tel comportement est dit *adoucissant*.

**Propagation brutale à déplacement imposé.** Supposons enfin que la rigidité soit une fonction concave de la longueur de la fissure. La souplesse est alors nécessairement convexe et la fissuration ne peut être contrôlée ni en force, ni en déplacement. Si l'on écrit toutefois le bilan d'énergie de Griffith lorsque la fissure évolue, on obtient  $-q^2 R'(\ell) = 2G_c$ . En paramétrant la courbe force-déplacement par la longueur de fissure, on a

$$q = \sqrt{\frac{2G_c}{-R'(\ell)}}, \quad Q = \sqrt{\frac{2G_c}{S'(\ell)}}$$

et, à la fois, la force et le déplacement décroissent quand la fissure progresse. La réponse a l'allure de celle représentée dans la figure 9.7. On appelle cela un *snap-back*.

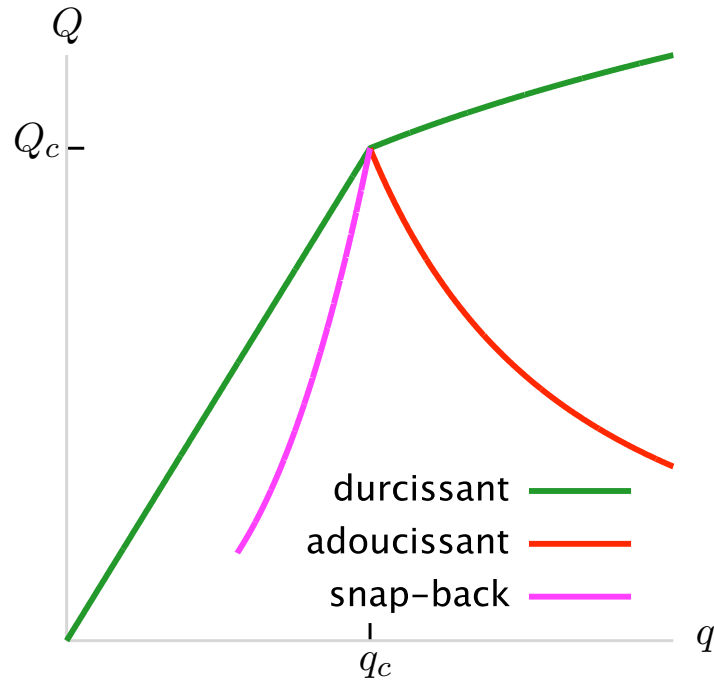


FIGURE 9.7 – Les trois réponses-types dans un diagramme force-déplacement

En pratique, on peut rencontrer des combinaisons de ces comportements-types. La réponse peut être d'abord durcissante, puis adoucissante. Elle peut au contraire présenter d'abord un snap-back avant d'être adoucissante. De tels exemples sont proposés en exercice.

**Exercice 9.4.** On reprend l'essai de la poutre DCB en supposant maintenant que la demi-hauteur de la poutre est variable,  $h = h(x)$ . On se propose de calculer l'évolution de la fissuration et de montrer que suivant la fonction  $h(x)$  on peut avoir des comportements durcissants, adoucissants ou une combinaison des deux. On utilisera toujours l'approximation de l'énergie élastique fournie par la théorie des poutres. La relation entre la force  $Q$  et le déplacement  $q$  pour une fissure de longueur  $\ell$  est donnée par

$$q = S(\ell)Q, \quad S(\ell) = \frac{12}{Ed} \int_0^\ell \frac{x^2}{h(x)^3} dx.$$

1. Montrer que si  $h(x) = h_0(x/h_1)^p$  où  $h_0$  et  $h_1$  sont deux constantes positives et  $2/3 < p < 1$ , alors le comportement est durcissant ;
2. Montrer que si  $h(x) = h_0(1 + (x/h_1)^3)$  où  $h_0$  et  $h_1$  sont deux constantes positives, alors le comportement est adoucissant pour des faibles longueurs de  $\ell$ , puis durcissant.
3. Chercher des formes de  $h(x)$  de façon à ce qu'il y ait un snap-back sur une plage de valeurs de  $\ell$ .

**Résumé des caractéristiques de la loi de Griffith.** Dans la théorie de Griffith, l'évolution de la fissuration est gouvernée par un principe de minimisation d'énergie : la structure développe plus ou moins sa fissuration de façon à minimiser son énergie totale, somme de son énergie potentielle et de son énergie de fissuration. En développant sa fissuration la structure augmente son énergie de fissuration, mais en contrepartie diminue son énergie potentielle. La structure doit donc trouver un équilibre entre les deux, équilibre qui fixe son état de fissuration. Cet "équilibre dynamique" qui évolue avec le chargement doit tenir compte de l'irréversibilité de la fissuration qui ne peut qu'augmenter. Dans le pire des cas, cet équilibre peut ne pas exister, ce qui se traduit par la rupture brutale de la structure. Il peut arriver aussi que cet équilibre ne soit atteint qu'après une phase de propagation instable durant laquelle la fissuration croît sous chargement constant. Les exemples courants montrent que la fissuration est un phénomène adoucissant qui en se développant diminue progressivement les capacités de résistance de la structure, les charges supportables devenant de plus en plus faibles. Ceci en fait un phénomène plus dangereux que la plasticité, nécessitant un contrôle continu des structures en service.

### 9.3 Le trajet des fissures

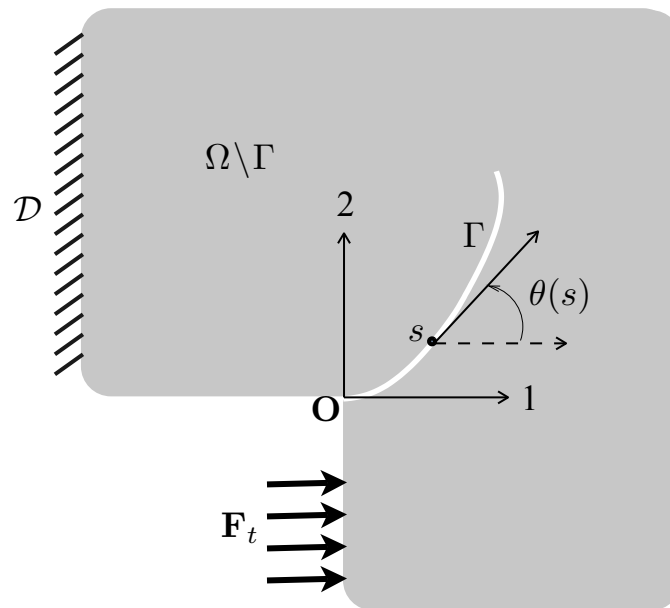


FIGURE 9.8 – Trajet d'une fissure en élasticité plane.

Dans la loi de propagation de Griffith telle que nous l'avons présentée et utilisée jusqu'ici, nous avons supposé connu le trajet de fissuration. Si l'on veut trouver le trajet, il faut introduire un critère supplémentaire. En effet, si l'on se place en élasticité plane et si l'on suppose *a priori* que la fissure se propagera suivant un arc simple, il faut déterminer la position de la pointe de la fissure à chaque instant, soit deux fonctions scalaires qui peuvent être soit celles donnant les coordonnées de la pointe



$t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$  en fonction du temps, soit la fonction  $s \mapsto \theta(s)$  donnant l'orientation de la fissure en fonction de l'abscisse curviligne et la fonction  $t \mapsto \ell(t)$  donnant l'abscisse curviligne de la pointe de la fissure en fonction du temps. Optons pour cette deuxième description. La connaissance des deux fonctions  $s \mapsto \theta(s)$  et  $t \mapsto \ell(t)$  suffit effectivement pour déterminer l'évolution de la fissure. En particulier, la courbe  $\Gamma$  représentant le trajet spatial de la fissure s'obtient par intégration. En effet en paramétrant la courbe par son abscisse curviligne, la fonction  $\ell \mapsto \underline{x}(\ell)$  est donnée par

$$\underline{x}(\ell) = \underline{x}(0) + \int_0^\ell \cos \theta(s) ds \underline{e}_1 + \int_0^\ell \sin \theta(s) ds \underline{e}_2.$$

Le critère d'Irwin  $K_I(t) = K_{Ic}$  ou le critère de Griffith  $G(t) = G_c$  ne fournissent qu'une équation. En supposant le trajet connu, ils permettent de déterminer au mieux  $t \mapsto \ell(t)$ . Ils sont susceptibles de dire *quand* la fissure peut se propager, mais ils ne peuvent pas dire *comment* elle doit se propager. Autrement dit, ce qu'il manque est un critère donnant l'orientation  $s \mapsto \theta(s)$  de la fissure. Cette question est délicate et n'a pas reçu à ce jour une réponse définitive. Plusieurs critères ont été proposés, le plus souvent sur des bases empiriques, mais tous souffrent de défauts plus ou moins rédhibitoires. Nous nous limiterons dans cette section à présenter les deux qui sont le plus couramment utilisés dans le cas de matériaux isotropes. Nous commencerons par le *Principe de Symétrie Locale* que nous comparerons ensuite au critère de stabilité dit du *G-max*.

### 9.3.1 Le Principe de Symétrie Locale

Le principe de symétrie locale repose sur l'idée intuitive que si une fissure est en mode I au moment où elle se propage, alors par "raison de symétrie" elle ne changera pas de direction. Le point clé consiste à supposer que la réciproque est vraie, *i.e.* que si une fissure se propage sans changer de direction, c'est qu'elle est en mode I. Pour bien comprendre la portée de cette hypothèse et formaliser le principe, il faut s'intéresser à la question du changement de direction d'une fissure et ses conséquences en terme de singularités<sup>3</sup>.

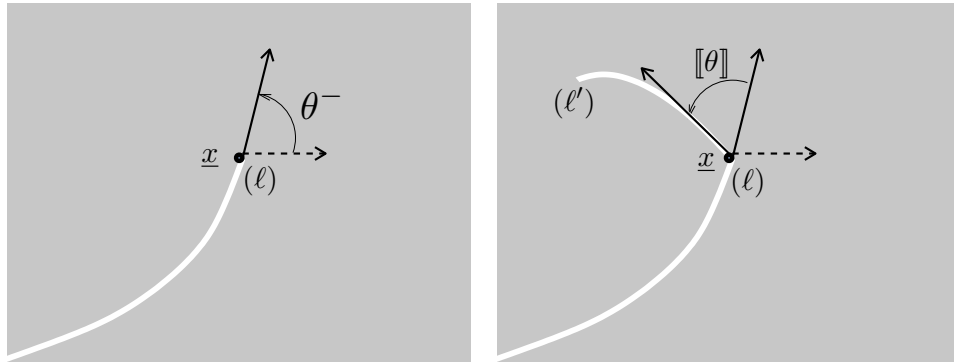


FIGURE 9.9 – Branchement d'une fissure en élasticité plane.

3. Il existe un réel problème de vocabulaire pour définir cette notion de changement de direction. Les deux mots *branchement* et *bifurcation* qui sont le plus souvent employés sont ambigus. On préférera toutefois le premier au deuxième qui avec son préfixe *bi* suggère que le trajet de la fissure se divise en deux branches. Malheureusement, ces deux mots sont considérés comme synonymes dans le langage courant. Les anglo-saxons utilisent le mot *kink*, ce qui a au moins le mérite d'être clair.

Considérons une fissure en élasticité plane dont le trajet est une courbe simple. Supposons qu'à l'instant  $t$  la pointe de la fissure soit au point géométrique  $\underline{x}$  (de la configuration de référence) d'abscisse curviligne  $\ell$  et que l'orientation de la fissure à cet instant soit caractérisée par l'angle  $\theta^-$  que fait la tangente à la fissure en  $\underline{x}$  avec la direction fixe  $\underline{e}_1$ . À cet instant, la singularité au point  $\underline{x}$  est caractérisée par les deux facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$ . Supposons que la fissure se propage à partir de cet instant, *i.e.* que la pointe de la fissure quitte le point  $\underline{x}$  à l'instant  $t$ , que la fissure s'oriente dans la direction  $\theta^+$  et que cette propagation soit *continue en temps*, cf Figure 9.9. Il y aura *branchement* si  $\theta^+ \neq \theta^-$  et on note  $\llbracket \theta \rrbracket$  l'angle de branchement

$$\llbracket \theta \rrbracket = \theta^+ - \theta^-.$$

À un instant  $t' > t$  après le branchement la pointe de la fissure est au point d'abscisse curviligne  $\ell' > \ell$ . La singularité à la pointe est toujours du même type, mais les facteurs d'intensité de contraintes ne sont plus les mêmes, notons les  $K_I(t')$  et  $K_{II}(t')$ . Faisons tendre  $t'$  vers  $t$  (par valeur supérieure). Du fait de la continuité en temps supposée,  $\ell'$  tend vers  $\ell$ . On montre alors que les facteurs d'intensité de contraintes tendent vers une limite *a priori* différente de  $K_I$  et  $K_{II}$ . On note ces limites  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  :

$$K_I^* = \lim_{t' \downarrow t} K_I(t'), \quad K_{II}^* = \lim_{t' \downarrow t} K_{II}(t').$$

On montre aussi, cf [4], que ces limites que l'on appellera facteurs d'intensité des contraintes *après* branchement ne dépendent que des facteurs d'intensité *avant* branchement ( $K_I, K_{II}$ ) et de l'angle de branchement  $\llbracket \theta \rrbracket$ . De façon précise, la dépendance de  $(K_I^*, K_{II}^*)$  en  $(K_I, K_{II})$  est *linéaire*, les 4 coefficients les reliant dépendant de l'angle  $\llbracket \theta \rrbracket$ . Ces coefficients sont notés  $F_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , et la relation entre les FIC s'écrit donc

$$\begin{cases} K_I^* &= F_{11}(\llbracket \theta \rrbracket) K_I + F_{12}(\llbracket \theta \rrbracket) K_{II}, \\ K_{II}^* &= F_{21}(\llbracket \theta \rrbracket) K_I + F_{22}(\llbracket \theta \rrbracket) K_{II}. \end{cases}$$

Il n'existe malheureusement pas de formules analytiques permettant de calculer les coefficients  $F_{ij}(\zeta)$  pour toute la plage  $(-\pi, \pi)$  de valeurs possibles pour  $\zeta$ . On peut toutefois obtenir un développement limité au voisinage de  $\zeta = 0$ , *i.e.* pour des faibles valeurs de l'angle de branchement. Ces développements limités sont donnés ci-dessous.

$$F_{11}(\zeta) = 1 - \frac{3}{8}\zeta^2 + \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{5}{128}\right)\zeta^4 + \left(\frac{1}{9\pi^4} - \frac{11}{72\pi^2} + \frac{119}{15360}\right)\zeta^6 + O(\zeta^8)$$

$$F_{12}(\zeta) = -\frac{3}{2}\zeta + \left(\frac{10}{3\pi^2} + \frac{1}{16}\right)\zeta^3 + \left(-\frac{2}{\pi^4} - \frac{133}{180\pi^2} + \frac{59}{1280}\right)\zeta^5 + O(\zeta^7)$$

$$F_{21}(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta - \left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{48}\right)\zeta^3 + \left(-\frac{2}{3\pi^4} + \frac{13}{30\pi^2} - \frac{59}{3840}\right)\zeta^5 + O(\zeta^7)$$

$$F_{22}(\zeta) = 1 - \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{3}{8}\right)\zeta^2 + \left(\frac{8}{3\pi^4} + \frac{29}{18\pi^2} - \frac{5}{128}\right)\zeta^4 + O(\zeta^6).$$

Pour des valeurs "finies" de l'angle de branchement, il faut avoir recours au calcul numérique. On obtient ainsi les graphes des  $F_{ij}(\zeta)$  qui sont représentés sur la figure 9.10. On peut remarquer quelques propriétés particulières de ces coefficients

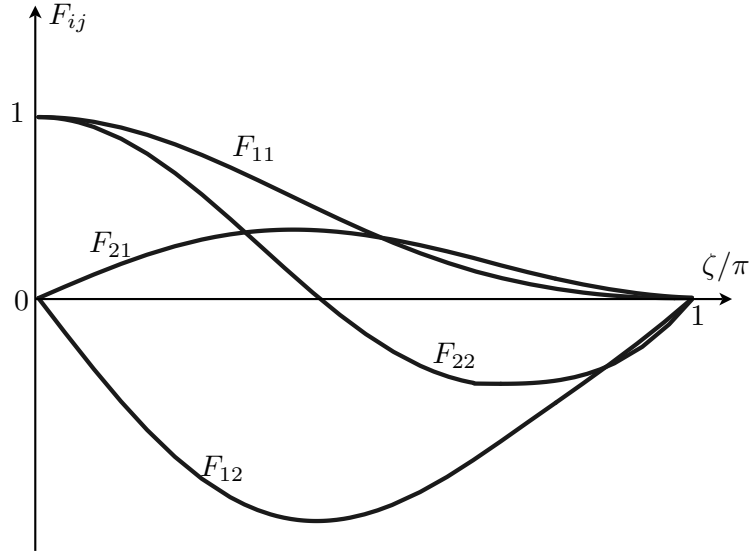


FIGURE 9.10 – Graphe des coefficients  $F_{ij}$  donnant les facteurs d'intensité de contraintes après branchement en fonction de l'angle de branchement  $\zeta$ .

1. Pour des raisons de symétrie,  $F_{11}$  et  $F_{22}$  sont des fonctions paires de  $\zeta$ , alors que  $F_{12}$  et  $F_{21}$  sont des fonctions impaires.
2. On a  $F_{ij}(0) = \delta_{ij}$  et donc  $K_I^* = K_I$  et  $K_{II}^* = K_{II}$  s'il n'y a pas de branchement.
3. On a  $F_{ij}(\pm\pi) = 0$ . La singularité “disparaît” si l'on envisage un branchement faisant repartir la fissure de la direction d'où elle vient.

Muni de ces propriétés des singularités lors d'un branchement, formulons précisément le principe de symétrie locale.

**Principe de Symétrie Locale.** *Une fissure se propagera sans changer de direction si et seulement si elle est en mode I à l'instant de la propagation :*

$$[\![\theta]\!](t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad K_{II}(t) = 0.$$

Ce principe permet de calculer l'angle de branchement sous réserve que la propagation soit continue en temps. On a en effet le résultat suivant

**Angle de branchement.** *Si la propagation est continue en temps et si elle suit le Principe de Symétrie Locale, alors, aux instants où il y a changement de direction de la fissure, l'angle de branchement est tel que le Facteur d'Intensité des Contraintes après branchement  $K_{II}^*$  est nul. Autrement dit, la fissure branche de façon à se retrouver en mode I. L'angle de branchement  $[\![\theta]\!]$  est donné par l'équation*

$$F_{21}([\![\theta]\!])K_I + F_{22}([\![\theta]\!])K_{II} = 0,$$

où  $K_I$  et  $K_{II}$  sont les FIC avant branchement.

PREUVE. Supposons que la propagation est continue et que la fissure branche à l'instant  $t$ . Alors, aux instants ultérieurs  $t'$  proches de  $t$ , la fissure se propageant sans changement de direction, on doit avoir d'après le Principe de Symétrie Locale  $K_{II}(t') = 0$ . En passant à la limite quand  $t'$  tend vers  $t$ , on obtient par définition de  $K_{II}^*$ ,  $0 = \lim_{t' \downarrow t} K_{II}(t') = K_{II}^*$ . Ceci fournit l'équation (non linéaire) pour l'angle de branchement  $[[\theta]]$ .  $\square$

### 9.3.2 Le Critère du G-max

Nous n'avons exploité que très partiellement le principe de stabilité de Griffith. En effet, l'idée de ce principe est de dire qu'une fissure se propagera si on peut trouver une "direction" de propagation possible telle que le taux de restitution d'énergie potentielle associé soit plus grand que le taux de création d'énergie de fissuration<sup>4</sup>. Or, comme nous avons supposé jusqu'ici le trajet de fissuration connu, nous n'avons testé que la direction de propagation suivant le trajet pré-défini. En envisageant d'autres directions, nous allons obtenir des informations sur le chemin que peut emprunter la fissure.

Plaçons-nous dans le même cadre que celui où nous avons présenté le Principe de Symétrie Locale, *i.e.* en déformations planes, milieu linéairement élastique, homogène, isotrope. Supposons que la fissure se propage continûment *en temps* suivant une courbe  $\Gamma$  dont l'équation paramétrée par l'abscisse curviligne est  $\ell \mapsto \underline{x}(\ell)$ . Il s'agit de trouver des propriétés de cette courbe pour que le critère de stabilité soit satisfait. Plaçons-nous à un instant  $t$  où la pointe de la fissure est au point  $\mathbf{P} = \underline{x}(\ell(t))$  où la tangente à  $\Gamma$  fait l'angle  $\theta^-(t)$  avec l'axe 1. Testons la stabilité de cet état de la structure en envisageant un petit segment de fissure supplémentaire  $\Sigma_h$  de longueur  $h$  faisant un angle  $\zeta$  avec la tangente à la fissure en  $\mathbf{P}$ , cf Figure 9.11. Le chargement étant celui de l'instant  $t$ , le taux de restitution

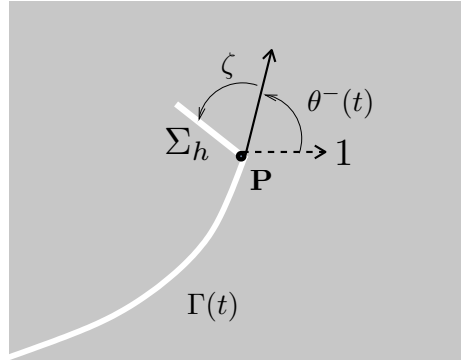


FIGURE 9.11 – Branchement virtuel servant à tester la stabilité de l'état de la structure à l'instant  $t$   
d'énergie potentielle  $G(\zeta)$  associé à ce branchement virtuel dans la direction  $\zeta$  est donné par

$$G(\zeta) = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( P(t, \Gamma(t) \cup \Sigma_h) - P(t, \Gamma(t)) \right).$$

4. On utilise en fait la contraposée pour formuler le problème d'évolution : à chaque instant l'état de fissuration doit être tel que dans toute direction de propagation "physiquement" envisageable le taux de restitution d'énergie potentielle doit être inférieur ou égal au taux de création d'énergie de fissuration.

Il dépend évidemment de  $\zeta$  mais aussi de la géométrie de la structure, de l'état de fissuration  $\Gamma(t)$  et du chargement. Pour que l'état de la structure à l'instant  $t$  soit stable, il faut donc que

$$\boxed{\text{Critère de stabilité élargi} \quad : \quad G(\zeta) \leq G_c, \quad \forall \zeta \in (-\pi, \pi).}$$

Supposons maintenant que la fissure se propage *continûment* à l'instant  $t$  en s'orientant dans la direction  $\theta^+(t)$  et notons  $\llbracket \theta \rrbracket = \theta^+(t) - \theta^-(t)$  l'angle de branchement. Le taux de restitution d'énergie potentielle *réel* est donc  $G(\llbracket \theta \rrbracket)$ . En vertu du bilan d'énergie de Griffith, puisque la fissure se propage continûment on doit avoir  $G(\llbracket \theta \rrbracket) = G_c$ . En comparant avec le critère de stabilité, on voit donc que l'angle de branchement doit maximiser le taux de restitution d'énergie potentielle parmi tous les angles de branchement possibles. Ceci constitue le principe dit du G-max.

**Critère du G-max..** *Si la propagation est continue en temps et si elle suit la loi de Griffith (dont le critère de stabilité élargi), alors la fissure choisit son orientation de façon à maximiser son taux de restitution d'énergie potentielle. On a*

1. À un instant où la fissure se propage,  $G_c = G(\llbracket \theta \rrbracket) = \max_{\zeta \in (-\pi, \pi)} G(\zeta)$  ;
2. À tout instant,  $G_c \geq \max_{\zeta \in (-\pi, \pi)} G(\zeta)$ .

### 9.3.3 Comparaison des deux critères

Avant de comparer les deux critères de branchement, notons que le critère du G-max est une conséquence du critère de stabilité élargi de Griffith, alors que le principe de symétrie locale n'a pas d'origine physique claire (en dehors de la notion un peu vague de symétrie). Notons aussi que le critère de stabilité peut s'utiliser dans un cadre bien plus large que celui où nous nous sommes placés, alors que le principe de symétrie locale est limité aux milieux isotropes en élasticité plane. Dans ce cadre restreint, il est cependant légitime de les comparer. On peut montrer, mais nous ne reproduirons pas la démonstration, que ces deux critères *ne sont pas équivalents* et qu'ils prédisent en général des angles de branchement différents (mais proches). Toutefois, ils coïncident dans une situation particulière, très utile en pratique.

**Equivalence des critères.** *Toujours sous l'hypothèse que la propagation est continue en temps, le Principe de Symétrie Locale et le critère du G-max prédisent tous deux que la fissure se propage sans changer de direction si et seulement si la fissure est en mode I.*

PREUVE. Cette propriété est l'essence même du principe de symétrie locale. Il s'agit donc de montrer que le critère du G-max donne le même résultat. On utilise pour cela la formule d'Irwin (qui s'applique toujours dans le cas d'un branchement en remplaçant les facteurs d'intensité de contraintes avant branchement par ceux après chargement) :

$$G(\zeta) = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^*(\zeta)^2 + K_{II}^*(\zeta)^2).$$

Montrons d'abord que si  $K_{II} = 0$ , alors  $G(\zeta)$  est maximal en  $\zeta = 0$ . Si  $K_{II} = 0$ , on a

$$G(\zeta) = \frac{1 - \nu^2}{E} (F_{11}(\zeta)^2 + F_{21}(\zeta)^2) K_I^2.$$

Comme  $F_{11}(0) = 1$  et  $F_{21}(0) = 0$ , il faut vérifier que  $F_{11}(\zeta)^2 + F_{21}(\zeta)^2 < 1, \forall \zeta \neq 0$ . On peut faire cette vérification au voisinage de 0 à l'aide des développements limités des  $F_{ij}$  :  $F_{11}(\zeta)^2 + F_{21}(\zeta)^2 = 1 - \zeta^2/2 + O(\zeta^4)$ . Ailleurs, la vérification est numérique, cf Figure 9.12.

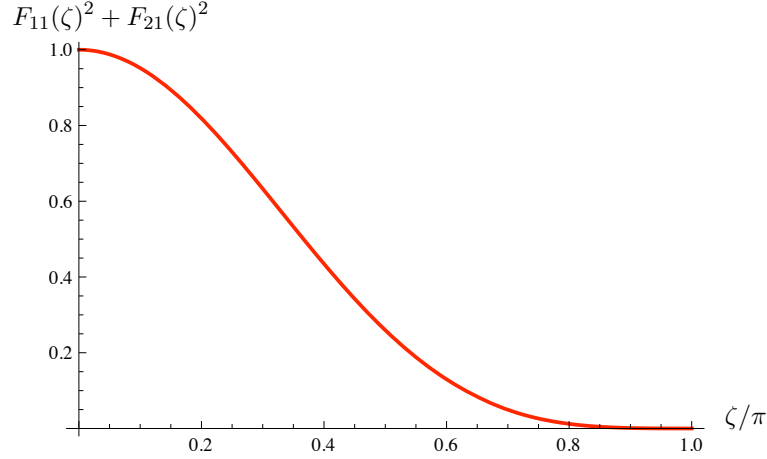


FIGURE 9.12 – Vérification numérique que  $G(\zeta)$  est maximal en  $\zeta = 0$  quand  $K_{II} = 0$ .

Montrons la réciproque : si  $G(\zeta)$  est maximal en  $\zeta = 0$ , alors  $K_{II} = 0$ . Si  $G(\zeta)$  est maximal en  $\zeta = 0$ , en écrivant que  $\frac{dG}{d\zeta}(0) = 0$ , on tire des propriétés des fonctions  $F_{ij}$  et de leur dérivée en 0 que  $K_I K_{II} = 0$ . Il faut donc que soit  $K_I = 0$ , soit  $K_{II} = 0$ . Si  $K_I = 0$  alors, on devrait avoir  $F_{12}(\zeta)^2 + F_{22}(\zeta)^2 \leq 1, \forall \zeta$ , ce qui est manifestement impossible compte tenu des développements des fonctions au voisinage de 0,  $F_{12}(\zeta)^2 + F_{22}(\zeta)^2 = 1 + (3/2 - 8/\pi^2)\zeta^2 + O(\zeta^4)$ . On doit donc avoir  $K_{II} = 0$ .  $\square$

## 9.4 Au delà de la théorie de Griffith

Cette courte section a vocation de pointer quelques défauts et lacunes de la théorie de Griffith et de donner quelques pistes possibles pour y remédier. Mais évidemment chacune de ces questions mériterait que l'on y consacre beaucoup plus de temps.

### 9.4.1 Initialisation de la fissuration

Dans tous les exemples que nous avons traités jusqu'ici, nous avons toujours supposé l'existence d'une fissure initiale dans la structure. On pourrait arguer que c'est conforme à la réalité, tout objet contenant des défauts dès sa fabrication. Toutefois, la vraie raison est que la théorie de Griffith n'est pas vraiment capable de rendre compte de la nucléation d'une fissure dans une structure. On peut le voir sur la formule donnant les facteurs d'intensité des contraintes aux pointes d'une fissure de longueur  $2\ell$  dans un milieu infini avec une contrainte uniaxiale à l'infini, cf Chapitre 7, page 175 :  $K_I$  et  $K_{II}$  sont proportionnels à  $\sigma\sqrt{\ell}$ ,  $G$  est proportionnel à  $\sigma^2\ell$  et tend donc vers 0 quand  $\ell$  tend vers 0. Si l'on adopte le critère de Griffith (ou celui d'Irwin), on voit qu'il faut une contrainte de l'ordre de  $\sqrt{G_c/\ell}$  pour faire se propager une fissure de longueur  $\ell$  et donc à la limite une contrainte infinie pour

nucléer une fissure. Ceci peut se voir aussi en termes d'énergie. Comme  $G$  est la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la longueur de la fissure, en intégrant les expressions précédentes on voit que la restitution d'énergie potentielle due à la nucléation d'une petite fissure de longueur  $\ell$  est de l'ordre de  $\sigma^2 \ell^2$  alors que l'énergie de fissuration vaut  $G_c \ell$ . Par conséquent, l'apport d'énergie potentielle est trop faible pour créer l'énergie de surface nécessaire.

On peut généraliser ce résultat et montrer qu'il n'est pas possible de faire apparaître une fissure en un point intérieur d'une structure à partir du critère de Griffith. Mais ce résultat reste vrai même en fond d'entaille où pourtant les contraintes sont infinies en raison de la présence d'une singularité. Montrons-le en nous plaçant en élasticité anti-plane pour simplifier les raisonnements. Nous utilisons les notations du chapitre précédent. Considérons une structure contenant une entaille dont l'angle est  $2\omega$ , qui est fixée sur la partie du bord  $\partial_D \Omega$  et est soumise à des forces antiplanes  $T$  sur la partie complémentaire du bord  $\partial_N \Omega$  avec  $T = 0$  sur les bords de l'entaille. Les forces volumiques sont nulles. On sait, cf le chapitre précédent, que les déplacements et contraintes solutions, notés  $\underline{\xi} = \xi \underline{e}_3$  et  $\underline{\sigma} = \sigma_{3r} \underline{e}_r + \sigma_{3\theta} \underline{e}_\theta$ , sont singuliers à la pointe avec une singularité de la forme :

$$\xi = Kr^\alpha \sin \alpha \theta + \dots, \quad \underline{\sigma} = \mu K \alpha r^{\alpha-1} (\sin \alpha \theta \underline{e}_r + \cos \alpha \theta \underline{e}_\theta) + \dots, \quad \alpha = \frac{\pi}{2\omega}.$$

L'énergie potentielle de la structure saine est  $P(0)$ . Introduisons une petite fissure  $\Gamma_\ell$  de longueur  $\ell$  à la

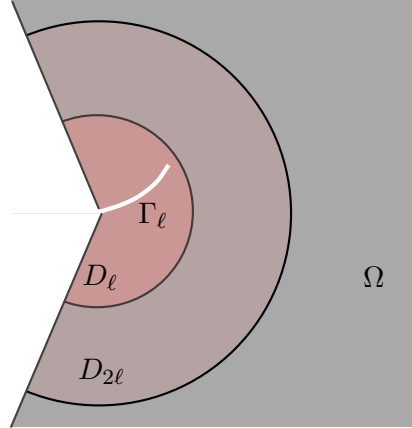


FIGURE 9.13 – Les différents domaines au voisinage de la pointe de l'entaille

pointe (sa forme et son orientation sont sans importance). L'énergie potentielle de la structure fissurée à l'équilibre sous le même chargement est  $P(\ell)$ . Il s'agit d'évaluer la restitution d'énergie potentielle due à la fissure. Nous allons montrer que

$$0 \leq P(0) - P(\ell) \leq C \ell^{2\alpha} \quad (9.6)$$

où  $C$  est une constante positive ne dépendant que de la structure saine. Ceci suffira pour conclure car comme  $\omega < \pi$ , on a  $2\alpha = \pi/\omega > 1$  et donc  $G(0) = \lim_{\ell \rightarrow 0} (P(0) - P(\ell))/\ell = 0$ . Selon le critère de Griffith, la fissure ne peut pas nucléer.

Pour prouver (9.6) nous allons utiliser le théorème de l'énergie complémentaire qui dit dans notre cas que  $-P(\ell)$  minimise l'énergie élastique par rapport à l'ensemble des champs statiquement admis-

sibles de la structure fissurée :

$$-P(\ell) = \min_{\underline{\tau} \in \mathcal{S}(\ell)} \int_{\Omega} \frac{\underline{\tau} \cdot \underline{\tau}}{2\mu} d\Omega$$

avec

$$\mathcal{S}(\ell) = \{ \underline{\tau} : \operatorname{div} \underline{\tau} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Gamma_{\ell}, \quad \underline{\tau} \cdot \underline{n} = T \text{ sur } \partial_N \Omega, \quad \underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\ell} \}.$$

Construisons un champ de contraintes statiquement admissible en s'appuyant sur le champ de contraintes solution  $\underline{\sigma}$  de la structure saine. Comme ce champ est à divergence nulle au voisinage de la pointe de l'entaille et que les contraintes sont nulles sur les bords de l'entaille, on peut introduire la fonction d'Airy  $\psi$  et écrire

$$\sigma_{3r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \sigma_{3\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

La fonction d'Airy est nulle sur les bords de l'entaille et a un comportement en  $r^{\alpha}$  au voisinage de la pointe de l'entaille (la partie singulière de  $\psi$  est exactement  $\mu K r^{\alpha} \cos \alpha \theta$ ). On construit le champ de contrainte  $\underline{\tau}$  en utilisant une fonction d'Airy de la forme  $f(r)\psi$  :

$$\tau_{3r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(f\psi)}{\partial \theta}, \quad \tau_{3\theta} = \frac{\partial(f\psi)}{\partial r}, \quad f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r \leq \ell \\ r/\ell - 1 & \text{si } \ell \leq r \leq 2\ell \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si on note  $D_l$  la partie de  $\Omega$  incluse dans la boule de centre la pointe et de rayon  $l$ , le champ  $\underline{\tau}$  est nul dans  $D_{\ell}$  et coïncide avec  $\underline{\sigma}$  en dehors de  $D_{2\ell}$ . On vérifie facilement qu'il est statiquement admissible (en particulier,  $\underline{\tau} \cdot \underline{n}$  est continu aux bords des différents domaines). Utilisons-le pour avoir une majoration de  $P(0) - P(\ell)$  (on sait déjà que  $P(0) \geq P(\ell)$ ) :

$$\begin{aligned} 0 \leq P(0) - P(\ell) &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu} (\underline{\tau} \cdot \underline{\tau} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}) d\Omega \\ &= - \int_{D_{\ell}} \frac{\underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}}{2\mu} d\Omega + \int_{D_{2\ell} \setminus D_{\ell}} \frac{1}{2\mu} (\underline{\tau} \cdot \underline{\tau} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma}) d\Omega \\ &\leq \int_{D_{2\ell} \setminus D_{\ell}} \frac{\underline{\tau} \cdot \underline{\tau}}{2\mu} d\Omega \end{aligned}$$

Or  $\tau_{3r} = f\sigma_{3r}$  et donc  $\tau_{3r} \sim \ell^{\alpha-1}$  dans  $D_{2\ell} \setminus D_{\ell}$ . De même,  $\tau_{3\theta} = f'\psi + f\sigma_{3\theta} = \psi/\ell + f\sigma_{3\theta}$  et donc  $\tau_{3\theta} \sim \ell^{\alpha-1}$  dans  $D_{2\ell} \setminus D_{\ell}$ . Donc  $\int_{D_{2\ell} \setminus D_{\ell}} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} d\Omega \sim \ell^{2\alpha}$  ce qui fournit l'estimation (9.6) cherchée.

**Conclusion** : La théorie de Griffith ne permet pas de rendre compte de la nucléation d'une fissure, même en fond d'entaille.

La raison de cet échec incombe au fait que l'on autorise des contraintes infinies dans la théorie de Griffith. Une façon de "tuer" les singularités et de faire apparaître dans la théorie un seuil sur les contraintes est de tenir compte des forces de cohésion qui sont inévitablement présentes près de la pointe de la fissure, là où les lèvres ne sont pas suffisamment éloignées l'une de l'autre. On fait ainsi d'une pierre deux coups : on se débarrasse du concept physiquement incorrect de contraintes infinies et on obtient un critère de nucléation des fissures. C'est l'essence de la théorie de Barenblatt que nous ne développerons pas. Évoquons simplement l'idée de base qui consiste à faire dépendre la densité d'énergie de fissuration du saut de déplacement (alors que dans la théorie de Griffith, c'est la



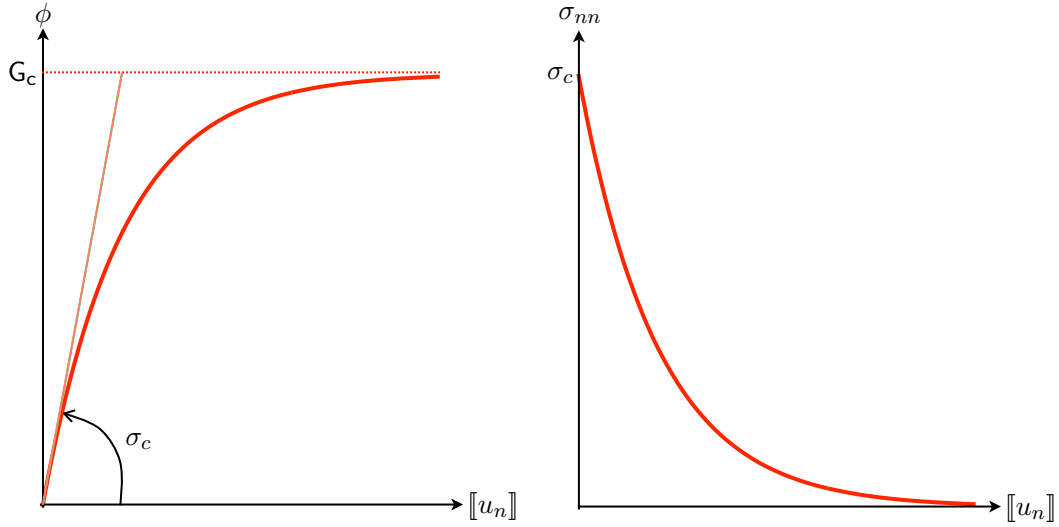


FIGURE 9.14 – Modèle de Barenblatt : la densité d'énergie de fissuration (à gauche) et la contrainte de cohésion (à droite) en fonction du saut de déplacement normal

constante  $G_c$ ). On introduit donc une densité surfacique d'énergie de fissuration  $\phi$  pouvant dépendre du point, de l'orientation de la fissure et du saut des déplacements. Plaçons-nous pour simplifier en mode I, seul le déplacement normal étant discontinu. En prenant une densité d'énergie de fissuration de la forme  $\phi(\llbracket \xi_n \rrbracket)$  où  $\phi$  est une fonction définie pour les  $\llbracket \xi_n \rrbracket \geq 0$  (pour respecter la condition de non-interpénétration), nulle en 0, croissante, concave et tendant asymptotiquement vers  $G_c$ , on obtient par dérivation par rapport à  $\llbracket \xi_n \rrbracket$  la contrainte normale de cohésion :  $\sigma_{nn} = \phi'(\llbracket \xi_n \rrbracket)$  qui est positive, décroissante de  $\sigma_c = \phi'(0)$  à 0. C'est la contrainte  $\sigma_c$  qui joue le rôle de contrainte seuil (l'équivalent d'un critère de traction maximale) et qui intervient dans la nucléation des fissures.

Une fois que la fissure est apparue, une zone cohésive demeure en pointe de fissure et s'adapte de façon à ce qu'il n'y ait plus de singularités. Ce faisant on introduit dans le modèle une longueur caractéristique  $\ell_c$  du matériau, par exemple le rapport  $\ell_c = \sigma_c/G_c$ . Cela se traduit par des effets d'échelle différents de ceux de la théorie de Griffith. Mais d'autres problèmes surgissent dans la modélisation. Outre la difficulté à identifier expérimentalement la fonction  $\phi$ , se pose le problème de comment prendre en compte l'irréversibilité de la fissuration. Là encore, une infinité de possibilités s'offrent au modélisateur et des choix sont à faire en relation avec les phénomènes observés. Toutes ces questions sont du ressort de la recherche actuelle.

#### 9.4.2 Fatigue

Toute structure soumise à des chargements variables de faible amplitude finit par se fissurer et la fissure une fois créée continue à se propager jusqu'à la rupture complète de la structure si l'on maintient ce type de chargement. C'est évidemment un des dangers qui guette toutes les structures qui sont soumises à des chargements cycliques et qui nécessite des contrôles réguliers. Au niveau de la modélisation, il est clair que le modèle de Griffith ne permet pas de rendre compte de ce phénomène. En effet, reprenons l'exemple de la poutre DCB soumise à des cycles de charge-décharge. On a vu

qu'après la première montée en charge où il peut y avoir eu propagation de la fissure, toutes les autres phases de décharge jusqu'à 0 et recharge jusqu'au niveau maximal de la première montée sont réversibles. La fissuration n'évolue plus. Il faut donc modifier le modèle. C'est Paris, un ingénieur américain travaillant dans l'aéronautique, qui le premier a proposé une loi empirique sur la base de résultats expérimentaux. Les essais consistent à mesurer sur des éprouvettes normalisées, telles les éprouvettes CT, l'avancée d'une fissure à chaque cycle en fonction de l'amplitude du chargement, la structure étant sollicitée en mode I comme pour la mesure de la ténacité. Les résultats sont représentés dans un diagramme  $(d\ell/dN, \Delta K_I)$ ,  $\ell$  représentant la longueur de la fissure,  $N$  le nombre de cycles (qui est en général très grand et est donc traité comme une variable continue) et  $\Delta K_I = K_{I_{\max}} - K_{I_{\min}}$  est l'amplitude du chargement exprimée en terme du facteur d'intensité des contraintes. Dans un diagramme log-log, on obtient des courbes qui ont l'allure de celle représentée sur la figure 9.15. On y

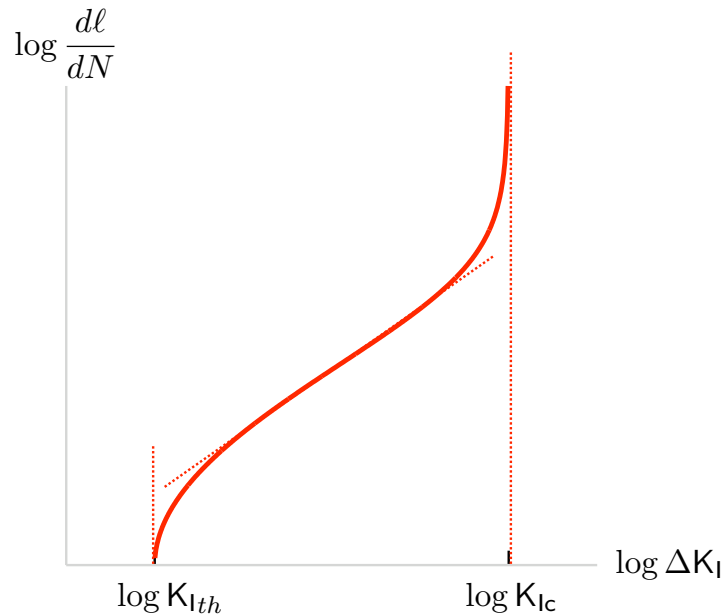


FIGURE 9.15 – Courbe expérimentale typique obtenue dans un essai de fatigue sous chargement cyclique

distingue plusieurs régimes :

1. En dessous d'une certaine valeur  $K_{I_{th}}$  de  $\Delta K_I$ , il n'y a pas d'évolution de la fissure (ou plus exactement pas d'évolution visible à l'échelle du nombre de cycles explorée). C'est le domaine dit d'*endurance*. Théoriquement en dessous de ce seuil, aucun risque de rupture n'est à craindre. (Ce concept d'endurance est en fait très discutable et très discuté.)
2. Pour des valeurs de  $\Delta K_I$  légèrement supérieure à  $K_{I_{th}}$ , la courbe est concave avec des variations rapides de la pente, mais l'avancée de la fissure à chaque cycle reste faible. C'est le régime de la fatigue à très grand nombre de cycles.
3. Pour des valeurs de  $\Delta K_I$  intermédiaires entre  $K_{I_{th}}$  et  $K_{I_c}$  la courbe est pratiquement rectiligne avec une pente  $m$  dépendante du matériau et de l'environnement. La loi d'évolution de la

fissuration est donc une loi puissance

$$\frac{d\ell}{dN} = C \Delta K_I^m \quad (9.7)$$

où  $C$  est l'autre constante permettant de positionner la droite sur le diagramme. Elle dépend aussi du matériau et de l'environnement. C'est le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles, celui qui est le plus étudié et celui sur lequel s'est basé Paris pour proposer la loi (9.7) qui porte son nom.

4. Pour des valeurs de  $\Delta K_I$  proches de la ténacité  $K_{Ic}$ , la courbe devient convexe avec une variation très rapide de la pente lorsqu'on approche  $K_{Ic}$ . On est dans le domaine de la fatigue à petit nombre de cycles.
5. Pour des valeurs de  $\Delta K_I$  supérieures à  $K_{Ic}$ , il y a rupture de l'éprouvette lors du premier cycle en conformité avec les résultats sous chargement monotone qui ont inspiré les lois d'Irwin et de Griffith.

Une des explications qualitatives du phénomène de fatigue est qu'à l'échelle "microscopique" toute modification du sens du chargement (décharge ou recharge) s'accompagne d'une dissipation d'énergie qui est directement liée à l'amplitude du chargement. Cette dissipation est faible lors d'un cycle et peut donc être négligée tant que l'on ne s'intéresse qu'au comportement à court terme et à petits nombre de cycles. Par contre, par un effet d'accumulation, le phénomène devient visible et ne peut plus être négligé lorsque le nombre de cycles augmente.

Au niveau de la modélisation, si la loi de Paris (9.7) est d'utilisation facile, elle pêche par le fait qu'elle ne vaut que dans des conditions très particulières (chargement cyclique de forme et d'amplitude bien précis). Comme en pratique les structures sont soumises à des chargements variables de forme très complexe, il faut proposer des méthodes pour leur trouver un équivalent en termes de chargement cyclique ou de séquences de chargement cyclique pour pouvoir utiliser la loi de Paris. Il manque clairement un modèle général faisant le lien entre les lois de Griffith et les lois de Paris que l'on pourrait utiliser pour n'importe quel chargement. Une des pistes explorées actuellement est d'utiliser les lois du type Barenblatt avec forces cohésives.

## Annexe A

# Fiches de synthèse

## Elasticité I

### • Comportement élastique linéaire (sans précontraintes)

— *Relation contrainte-déformation :*

$$\text{cas général} \quad : \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$$

$$\text{cas isotrope} \quad : \quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$\lambda, \mu$  : coefficients de Lamé,  $E$  : module d'Young,  $\nu$  : coefficient de Poisson

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad 2\nu = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

— *Positivité des coefficients élastiques :*

$$\text{cas général} \quad : \quad C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} > 0, \quad \forall \underline{\varepsilon} \neq \underline{0}, \quad S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} > 0, \quad \forall \underline{\sigma} \neq \underline{0}$$

$$\text{cas isotrope} \quad : \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

### • Problème-type d'élastostatique linéarisé

— *Données :*

$\Omega$  : configuration de référence,  $\Sigma$  : interfaces,  $\underline{f}$  : forces volumiques

$\partial_D\Omega$  : partie du bord où les déplacements sont imposés,  $\xi^d$  : déplacement imposé

$\partial_N\Omega$  : partie du bord où les forces sont imposées,  $\underline{T}$  : force surfacique imposée

— *Inconnues :*

$\underline{\xi}$  : champ des déplacements,  $\underline{\sigma}$  : champ des contraintes,  $\underline{\varepsilon}$  : champ des déformations

— *Equations :*

$$\text{équilibre volumique} \quad : \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma$$

$$\text{conditions aux limites} \quad : \quad \xi_i = \xi_i^d \text{ sur } \partial_D\Omega, \quad \sigma_{ij}n_j = T_i \text{ sur } \partial_N\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_D\Omega$$

$$\text{conditions de continuité} \quad : \quad \llbracket \xi_i \rrbracket = 0, \quad \llbracket \sigma_{ij} \rrbracket n_j = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

$$\text{compatibilité} \quad : \quad 2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma$$

$$\text{comportement} \quad : \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Sigma$$

## Elasticité II

- **Formulation variationnelle de l'équilibre**

- *déplacements cinématiquement admissibles* : ce sont les champs de vecteurs réguliers qui vérifient les conditions aux limites en déplacement,

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{\xi}^* : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Sigma, \quad \underline{\xi}^* = \underline{\xi}^d \text{ sur } \partial_D \Omega \right\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{C}$  des déplacements cinématiquement admissibles est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est  $\mathcal{C}_0$ ,

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ \underline{\xi}^* : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Sigma, \quad \underline{\xi}^* = \underline{0} \text{ sur } \partial_D \Omega \right\}.$$

- *déplacements rigides admissibles* : ce sont les éléments de  $\mathcal{C}_0$  dont les déformations associées sont nulles,

$$\mathcal{R} = \left\{ \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0 : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \right\}.$$

- *contraintes statiquement admissibles* : ce sont les champs de tenseurs symétriques réguliers qui vérifient les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contraintes,

$$\mathcal{S} = \left\{ \underline{\sigma}^* : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}_s^3 : \operatorname{div} \underline{\sigma}^* + \underline{f} = \underline{0} \text{ dans } \Omega \setminus \Sigma, \quad \llbracket \underline{\sigma}^* \rrbracket \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Sigma, \quad \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} = \underline{T} \text{ sur } \partial_N \Omega \right\}.$$

- *travail des efforts extérieurs donnés* : le travail des efforts extérieurs donnés dans le champ de déplacements virtuels  $\underline{\xi}^*$  est la quantité  $W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*)$  suivante

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\xi}^* d\Omega + \int_{\partial_N \Omega} \underline{T} \cdot \underline{\xi}^* dS.$$

- *Principe des Travaux Virtuels* : un champ de contraintes  $\underline{\sigma}^*$  est statiquement admissible si et seulement si la condition suivante est vérifiée

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0$$

où  $\underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*)$  désigne le champ de déformations associé à  $\underline{\xi}^*$ , *i.e.*  $2\varepsilon_{ij}(\underline{\xi}^*) = \frac{\partial \xi_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j^*}{\partial x_i}$ .

- *condition nécessaire d'équilibre* : il existe des champs de contraintes statiquement admissibles seulement si la condition suivante est satisfaite

$$W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*) = 0, \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{R}.$$

### Elasticité III

- **Théorème de l'énergie potentielle**

- *formulation variationnelle du problème d'élastostatique* : le champ de déplacements  $\underline{\xi}$  est solution du problème d'élastostatique si et seulement s'il vérifie le problème variationnel suivant

$$\underline{\xi} \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\underline{\xi}) \varepsilon_{kl}(\underline{\xi}^*) d\Omega = W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}_0.$$

- *énergie potentielle* : à un champ de déplacements cinématiquement admissibles  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$  on associe l'énergie potentielle  $\mathcal{P}(\underline{\xi}^*)$

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\underline{\xi}^*) \varepsilon_{kl}(\underline{\xi}^*) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{\xi}^*).$$

- *théorème* : le champ de déplacements  $\underline{\xi}$  est solution du problème d'élastostatique si et seulement s'il minimise l'énergie potentielle parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles,

$$\underline{\xi} \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\underline{\xi}) \leq \mathcal{P}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}.$$

- **Résultats généraux**

- *existence d'une solution* : sous réserve de régularité suffisante des données, le problème d'élastostatique admet une solution si et seulement si la condition nécessaire d'équilibre est satisfaite.
- *unicité de la solution* : quand une solution existe, le champ des contraintes et le champ des déformations solutions sont uniques alors que le champ des déplacements solution est unique à un déplacement rigide près.
- *formule de Clapeyron* : si  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel, i.e. si  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ , alors la solution vérifie la formule de Clapeyron,

$$\mathcal{P}(\underline{\xi}) = -\frac{1}{2} W_{\text{ext}}(\underline{\xi}).$$

**Forces généralisées et déplacements généralisés**

On se contente de résumer ici ces notions dans le cas des conditions aux limites envisagées dans le problème-type d'élastostatique linéarisé.

• **Paramètres de chargement**

- *données en forces surfaciques* : on suppose que  $\underline{T}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $m$  distributions de forces surfaciques données,  $\underline{T}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m Q_i \underline{T}^i(\underline{x})$  sur  $\partial_N \Omega$  où les  $\underline{T}^i$  sont données (fixées) et les  $m$  coefficients  $(Q_1, \dots, Q_m)$  sont des forces généralisées variables dans  $\mathbb{R}$ .
- *données en forces volumiques* : on suppose que  $\underline{f}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $n$  distributions de forces volumiques données,  $\underline{f}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n Q_{m+i} \underline{f}^i(\underline{x})$  dans  $\Omega$  où les  $\underline{f}^i$  sont données (fixées) et les  $n$  coefficients  $(Q_{m+1}, \dots, Q_{m+n})$  sont des forces généralisées variables dans  $\mathbb{R}$ .
- *données en déplacement* : on suppose que  $\underline{\xi}^d$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $p$  déplacements donnés,  $\underline{\xi}^d(\underline{x}) = \sum_{i=1}^p q_{m+n+i} \underline{u}^i(\underline{x})$  sur  $\partial_D \Omega$  où les  $\underline{u}^i$  sont donnés (fixés) et les  $p$  coefficients  $(q_{m+n+1}, \dots, q_{m+n+p})$  sont des déplacements généralisés variables dans  $\mathbb{R}$ .

• **Paramètres duaux**

- *déplacements généralisés associés aux  $\underline{T}^i$*  : à un champ de déplacements virtuels  $\underline{\xi}^*$  on associe les  $m$  déplacements généralisés  $(q_1(\underline{\xi}^*), \dots, q_m(\underline{\xi}^*))$  définis par

$$q_i(\underline{\xi}^*) = \int_{\partial_N \Omega} \underline{T}^i \cdot \underline{\xi}^* dS.$$

- *déplacements généralisés associés aux  $\underline{f}^i$*  : à un champ de déplacements virtuels  $\underline{\xi}^*$  on associe les  $n$  déplacements généralisés  $(q_{m+1}(\underline{\xi}^*), \dots, q_{m+n}(\underline{\xi}^*))$  définis par

$$q_{m+i}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \underline{f}^i \cdot \underline{\xi}^* d\Omega.$$

- *forces généralisées associées aux  $\underline{u}^i$*  : à un champ de contraintes virtuelles  $\underline{\sigma}^*$  on associe les  $p$  forces généralisées  $(Q_{m+n+1}(\underline{\sigma}^*), \dots, Q_{m+n+p}(\underline{\sigma}^*))$  définies par

$$Q_{m+n+i}(\underline{\sigma}^*) = \int_{\partial_D \Omega} \underline{u}^i \cdot \underline{\sigma}^* \cdot \underline{n} dS.$$

• **Propriété**

Si  $\underline{\xi}^*$  est cinématiquement admissible et si  $\underline{\sigma}^*$  est statiquement admissible, alors on a

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}^*) d\Omega = \sum_{i=1}^{m+n} Q_i q_i(\underline{\xi}^*) + \sum_{i=m+n+1}^{m+n+p} Q_i(\underline{\sigma}^*) q_i.$$



**Comportement élasto-plastique I**

- **Décomposition des déformations**

déf. élastique + déf. plastique :  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$

- **Décomposition des contraintes (en 3D)**

partie sphérique + déviateur :  $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\text{Tr } \underline{\underline{\sigma}}}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}}, \quad \text{Tr } \underline{\underline{s}} = 0$

- **Relation contrainte-déformation**

cas général :  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e$

matériau isotrope :  $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^e$

- **Relation déformation-contrainte**

cas général :  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}$

matériau isotrope :  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}$

- **Critère de plasticité en plasticité parfaite**

cas général :  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$   
 $f$  fonction convexe,  $f(\underline{\underline{0}}) < 0$

critère de Von Mises :  $\sigma_{eq} := \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \leq \sigma_c$

critère de Tresca :  $\max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_c$

- **Loi d'écoulement avec règle de normalité en plasticité parfaite**

cas général :  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \begin{cases} \dot{\eta} = 0 & \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 \\ \dot{\eta} \geq 0 & \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$

critère de Von Mises :  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{3\dot{\eta}}{2\sigma_c} \underline{\underline{s}}, \quad \begin{cases} \dot{\eta} = 0 & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_c \\ \dot{\eta} \geq 0 & \text{si } \sigma_{eq} = \sigma_c \end{cases}$   
 (incompressibilité plastique)  $(\text{Tr } \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = 0)$

## Comportement élasto-plastique II

- Critères de plasticité avec écrouissage (cas général)

cinématique :  $f(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) \leq 0$   
 $\underline{\underline{X}}$  : contrainte interne (variable en temps)

isotrope :  $f(\underline{\underline{\sigma}}/R) \leq 0$   
 $R$  : paramètre d'écrouissage (croissant en temps)

cinématique et isotrope :  $f((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})/R) \leq 0$

- Lois standards avec critère de Von Mises et écrouissage

écrouissage cinématique linéaire :  $\sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\underline{s}} - h\underline{\underline{\varepsilon}}^p) : (\underline{\underline{s}} - h\underline{\underline{\varepsilon}}^p)} \leq \sigma_c$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{3\dot{\eta}}{2\sigma_c} (\underline{\underline{s}} - h\underline{\underline{\varepsilon}}^p)$$

$h$  : module d'écrouissage (constant)  $> 0$

écrouissage isotrope :  $\sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \leq \sigma_c(p), \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{3\dot{\eta}}{2\sigma_c(p)} \underline{\underline{s}}$

$p$  : déformation plastique cumulée,  $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p}$

$\sigma_c(p)$  : contrainte critique croissante avec  $p$

- Calcul du multiplicateur plastique pour des lois standards

plasticité parfaite, cas général :  $\dot{\eta} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}\right)^+}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{C}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}})} \quad \text{si} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$

plasticité parfaite, Von Mises :  $\dot{\eta} = \frac{(\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})^+}{\sigma_c} \quad \text{si} \quad \sigma_{eq} = \sigma_c$

## Calcul de structures élasto-plastiques I

- **Condition initiale**

déformation plastique initiale :  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(\underline{x}, 0) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0^p(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega$

vérification de la compatibilité des conditions initiales : cf polycopié page 118

- **Equilibre et Conditions aux limites**

équilibre volumique :  $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Sigma, \quad t \geq 0$

conditions de Dirichlet :  $\underline{\underline{\xi}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\xi}}^d(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial_D \Omega, \quad t \geq 0$

conditions de Neumann :  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}, t), \quad \underline{x} \in \partial_N \Omega, \quad t \geq 0$

- **Compatibilité des déformations totales**

déformation vs déplacement :  $2\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) = \underline{\nabla} \underline{\underline{\xi}}(\underline{x}, t) + \underline{\nabla} \underline{\underline{\xi}}(\underline{x}, t)^T, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Sigma, \quad t \geq 0$

équations de compatibilité :  $\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k}$

en général,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  sont incompatibles et seul  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est compatible.

- **Conditions de continuité**

continuité aux interfaces :  $\llbracket \underline{\underline{\xi}} \rrbracket(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \llbracket \underline{\underline{\sigma}} \rrbracket(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Sigma, \quad t \geq 0$

définitions des sauts :  $\llbracket f \rrbracket(\underline{x}) = f^+(\underline{x}) - f^-(\underline{x}),$   
 $f^\pm(\underline{x}) = \lim_{h \downarrow 0} f(\underline{x} \pm h \underline{n}(\underline{x}))$

- **Comportement élasto-plastique** : cf fiches précédentes

- **Résultats généraux**

- *unicité des contraintes* : il existe **au plus un** champ de contraintes solution du problème d'évolution d'une structure faite de matériaux élastiques parfaitement plastiques standards.
- *unicité des déplacements et des déformations plastiques* : en plasticité **parfaite**, on n'est pas assuré de l'unicité des déplacements et des déformations plastiques.
- *existence d'une solution* : il existe **au moins une** solution au problème d'évolution d'une structure faite de matériaux élastiques parfaitement plastiques standards tant que les charges appliquées restent à l'intérieur du domaine (convexe) des charges supportables.

## Calcul de structures élasto-plastiques II

- **Hypothèses adoptées pour cette fiche et la suivante**

- *comportement* : le matériau est élasto-plastique parfait et satisfait le principe du travail maximal de Hill,

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}, \quad (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\varepsilon}}^p \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}.$$

- *chargement* : le chargement est un chargement à forces imposées et est défini par un nombre fini de paramètres,  $\underline{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ .
- *déplacements cinématiquement admissibles* :  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ .
- *travail des efforts extérieurs donnés* : il se met sous la forme

$$W_{\text{ext}}(\underline{\underline{\xi}}^*) = \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\underline{\xi}}^*), \quad \forall \underline{\underline{\xi}}^* \in \mathcal{C}$$

et les conditions nécessaires d'équilibre sont satisfaites :  $q_i(\underline{\underline{\xi}}^*) = 0, \forall \underline{\underline{\xi}}^* \in \mathcal{R}_0, \forall i$ .

- *problèmes d'élasticité associés* : on appelle  $\underline{\underline{\sigma}}^i$  le champ des contraintes solution du problème d'élasticité (sans déformation plastique) associé au chargement tel que  $Q_i = 1$  et  $Q_j = 0$  pour  $j \neq i$ .

- **Champs de contraintes statiquement ou plastiquement admissibles**

- *contraintes statiquement admissibles avec  $\underline{Q}$*  :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \text{ tel que } \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}^*) d\Omega = \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\underline{\xi}}^*), \quad \forall \underline{\underline{\xi}}^* \in \mathcal{C}.$$

- *contraintes plastiquement admissibles* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \text{ tel que } \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \in \mathbb{S}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

- **Charges élastiquement supportables**

$$\mathbb{Q}_e = \left\{ \underline{Q} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n Q_i \underline{\underline{\sigma}}^i \text{ plastiquement admissible} \right\}$$

- **Charges supportables**

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \underline{Q} \in \mathbb{R}^n : \exists \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ statiquement admissible avec } \underline{Q} \text{ et plastiquement admissible} \right\}$$

- **Charges limites** : ce sont les charges  $\underline{Q}$  sur la frontière de  $\mathbb{Q}_p$ .

### Calcul de structures élasto-plastiques III

- **Fonction d'appui du convexe  $\mathbb{S}$  de  $\mathbb{M}_s^3$**

définition générale :  $\pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$

convexe de Von Mises :  $\pi_{\text{VM}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \begin{cases} \sigma_c \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} & \text{si } \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \\ +\infty & \text{si } \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0 \end{cases}$

convexe de Tresca :  $\pi_{\text{T}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \begin{cases} \frac{\sigma_c}{2} (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|) & \text{si } \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \\ +\infty & \text{si } \text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0 \end{cases}$

- **Puissance dissipée plastiquement** (vitesse est synonyme de déplacement virtuel)

champs de vitesses réguliers :  $\mathcal{D}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega} \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*)) d\Omega$

champs de vitesses discontinus :  $\mathcal{D}(\underline{\xi}^*) = \int_{\bar{\Omega} \setminus \Sigma} \pi_{\mathbb{S}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*)) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi_{\mathbb{S}}(\llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket \otimes_s \underline{n}) d\Sigma.$

finitude de la puissance dissipée :

dans le cas d'incompressibilité plastique, la puissance dissipée est finie seulement si le champ de vitesses est à divergence nulle dans les parties régulières et avec une discontinuité purement tangentielle sur les surfaces de discontinuité, *i.e.*

$$\text{div } \underline{\xi}^* = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega} \setminus \Sigma, \quad \llbracket \underline{\xi}^* \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

- **Caractérisation énergétique des charges supportables**

— *définition équivalente des charges supportables :*

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \underline{Q} \in \mathbb{R}^n : \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{D}(\underline{\xi}^*) \geq \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi}^*) \right\}$$

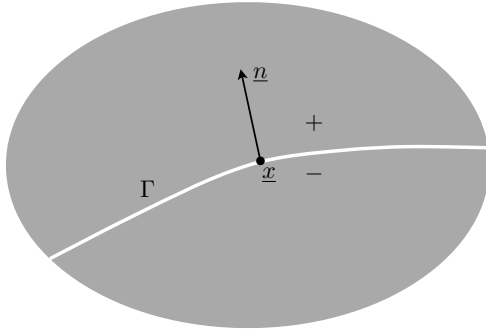
— *approche par l'extérieur de  $\mathbb{Q}_p$  :* on se donne un champ de vitesses cinématiquement admissibles, *i.e.*  $\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}$ . On sait que toutes les charges  $\underline{Q}$  telles que

$$\mathcal{D}(\underline{\xi}^*) < \sum_{i=1}^n Q_i q_i(\underline{\xi}^*)$$

sont non supportables. En conséquence si  $\mathcal{D}(\underline{\xi}^*) < +\infty$  et si  $q_i(\underline{\xi}^*) \neq 0$  pour au moins un  $i$ , alors on élimine ainsi un demi-espace de charges.

## Rupture I : les concepts généraux de la rupture fragile

- Les conditions aux limites sur les lèvres des fissures



$$[\xi] := \xi^+ - \xi^-$$

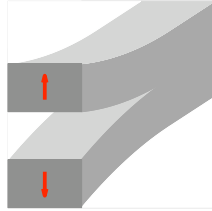
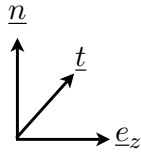
En un point où la fissure est ouverte

$$\begin{cases} \text{non contact :} & [\xi] \cdot \underline{n} > 0 \\ \text{non cohésion :} & \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \end{cases}$$

En un point où la fissure est fermée

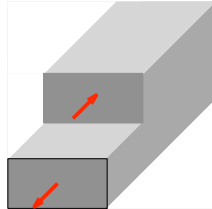
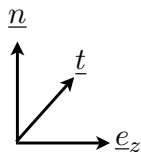
$$\begin{cases} \text{contact :} & [\xi] \cdot \underline{n} = 0 \\ \text{non frottement :} & \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{ colinéaire à } \underline{n} \end{cases}$$

- Les singularités à la pointe d'une fissure en milieu isotrope



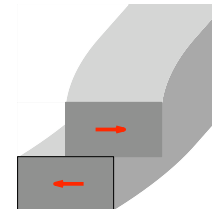
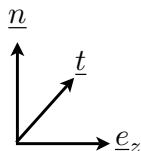
mode I (ouverture)

$$[\xi] \cdot \underline{n} = 8(1 - \nu^2) \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + \dots$$



mode II (glissement)

$$[\xi] \cdot \underline{t} = 8(1 - \nu^2) \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + \dots$$



mode III (déchirure)

$$[\xi] \cdot \underline{e}_z = \frac{4K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + \dots$$

Les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I, K_{II}, K_{III}$  sont des grandeurs globales (dépendant de la géométrie, du chargement et du matériau constitutif de la structure) dont l'unité est  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .  
Exemple : Pour une fissure de longueur  $2\ell$  en milieu infini et soumise à une traction uniforme  $\sigma$  à l'infini,

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi\ell}.$$

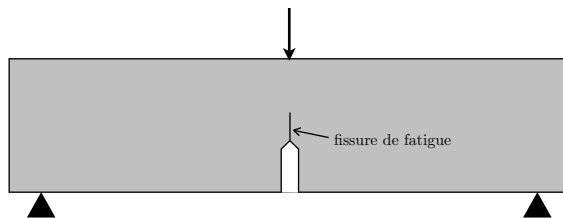
## Rupture II : le critère de propagation d'Irwin

- **Ténacité et critère d'Irwin**

La ténacité  $K_{Ic}$  est une grandeur caractérisant la fragilité du matériau. Le critère de propagation d'Irwin dit qu'une fissure en mode I se propage lorsque le facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  atteint la valeur critique  $K_{Ic}$ .

$$\text{Critère d'Irwin} : \begin{cases} \text{si } K_I < K_{Ic}, & \text{pas de propagation} \\ \text{si } K_I > K_{Ic}, & \text{propagation certaine} \end{cases}$$

- **Mesure expérimentale de la ténacité (couplée à un calcul numérique)**

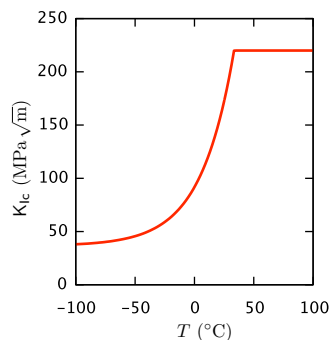


On usine une fissure dans une éprouvette normalisée, on mesure la charge à laquelle la fissure se propage, on calcule le  $K_I$  en supposant un comportement élastique et un état de déformations planes, on en déduit  $K_{Ic}$ .

- **Valeurs de la ténacité pour quelques matériaux**

Matériau	$E$ (GPa)	$K_{Ic}$ (MPa m <sup>1/2</sup> )	$G_c$ (J m <sup>-2</sup> )
Diamant	1000	4	15
Verre (Silice)	70	0.75	8
Mica	170	1.3	10
Composites à fibres de carbone	200–400	20–25	1000–3000
Pâte de ciment	20	0.5	10
Béton	30	1–1.5	30–80
Acier	200	20–200	50–50000

- **Dépendance de la ténacité avec la température**



Courbe empirique pour un acier de dépendance de la ténacité par rapport à la température et le phénomène de transition fragile-ductile.

### Rupture III : les grandeurs énergétiques de la théorie de Griffith

- **Le théorème de l'énergie potentielle pour un objet fissuré**

Le théorème de l'énergie potentielle s'applique toujours à un milieu élastique fissuré avec des conditions aux limites de contact unilatéral sans frottement entre les lèvres des fissures : pour un chargement et un état de fissuration donnés, le champ de déplacement à l'équilibre est celui qui possède la plus petite énergie potentielle parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles.

- **Les énergies associées à la structure en équilibre dans un état de fissuration  $\Gamma$**

$$\text{L'énergie potentielle} : P(\Gamma) = \min_{\mathcal{C}(\Gamma)} P(\underline{\xi}^*)$$

$$\text{L'énergie de fissuration (Griffith)} : D(\Gamma) = \int_{\Gamma} G_c(\underline{x}, \underline{n}(x)) dS$$

- **Le taux de restitution d'énergie potentielle**

$$\text{cas général} : G = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(\Gamma) - P(\Gamma_h)}{\text{aire}(\Gamma_h) - \text{aire}(\Gamma)}$$

$$\text{cas d'une fissure en 2D} : G = -\frac{dP}{d\ell}(\ell), \quad \ell \text{ longueur de la fissure}$$

$$\text{cas d'une fissure en 3D} : G = \int_{\partial\Gamma} G(\zeta) v(\zeta) d\zeta$$

$v(\zeta)$  vitesse normale de propagation sur le front  $\partial\Gamma$

- **Le taux de création d'énergie de fissuration**

$$\text{cas général} : D' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(\Gamma_h) - D(\Gamma)}{\text{aire}(\Gamma_h) - \text{aire}(\Gamma)}$$

$$\text{cas d'une fissure en milieu isotrope} : D' = G_c$$

- **Lien avec les singularités : Formule d'Irwin (matériau isotrope)**

$$\text{fissure en déformation plane} : G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

$$\text{fissure en déformation antiplane} : G = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2$$

$$\text{fissure en 3D} : G(\zeta) = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I(\zeta)^2 + K_{II}(\zeta)^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}(\zeta)^2$$

$$\text{lien entre la ténacité } K_{Ic} \text{ et } G_c : G_c = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{Ic}^2$$



## Rupture IV : la loi de propagation de Griffith

- **Cas “général”**

*Hypothèses*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{état de fissuration dépendant de } n \text{ paramètres} & : \underline{\ell}(t) = (\ell_1(t), \dots, \ell_n(t)) \\ \text{énergie potentielle à l'instant } t \text{ pour l'état de fissuration } \underline{\ell} & : P(t, \underline{\ell}) \\ \text{énergie de fissuration pour l'état de fissuration } \underline{\ell} & : D(\underline{\ell}) \end{array} \right.$$

*Les trois principes régissant à chaque instant  $t$  l'évolution de  $\underline{\ell}(t)$*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Condition d'irréversibilité} & : \dot{\ell}_i(t) \geq 0, \quad \forall i \\ \text{Condition de stabilité} & : -\frac{\partial P}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}(t)) \leq \frac{\partial D}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}(t)), \quad \forall i \\ \text{Bilan d'énergie} & : \left( \frac{\partial P}{\partial \ell_i}(t, \underline{\ell}(t)) + \frac{\partial D}{\partial \ell_i}(\underline{\ell}(t)) \right) \dot{\ell}_i(t) = 0, \quad \forall i \end{array} \right.$$

- **Cas de chargements dépendant d'un paramètre  $t$  croissant**

$$\begin{array}{ll} \text{- paramètre quelconque} & : P(t, \underline{\ell}) = t^2 P_1(\underline{\ell}) \\ \text{- force contrôlée } t = Q & : P(Q, \underline{\ell}) = -\frac{1}{2} S(\underline{\ell}) Q^2 \\ & S(\underline{\ell}) = \text{souplesse de la structure fissurée}, \quad \frac{\partial S}{\partial \ell_i} \geq 0 \\ \text{- déplacement contrôlé } t = q & : P(q, \underline{\ell}) = \frac{1}{2} R(\underline{\ell}) q^2 \\ & R(\underline{\ell}) = \text{raideur de la structure fissurée}, \quad \frac{\partial R}{\partial \ell_i} \leq 0 \end{array}$$

- **Cas d'un chargement monotone à un paramètre et d'une fissuration à un paramètre**

$$\text{Loi d'évolution de } t \mapsto \ell(t) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Condition d'irréversibilité} & : \dot{\ell}(t) \geq 0 \\ \text{Condition de stabilité} & : -t^2 P'_1(\ell(t)) \leq D'(\ell(t)) \\ \text{Bilan d'énergie} & : \left( t^2 P'_1(\ell(t)) + D'(\ell(t)) \right) \dot{\ell}(t) = 0 \end{array} \right.$$

## Rupture V : quelques propriétés de la loi de Griffith

- **Démarrage de la propagation.** On se place dans les conditions suivantes :

1. La structure est soumise à un chargement monotone  $t$  ;
2. La fissuration dépend de  $n$  paramètres  $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n)$  et l'état initial est  $\underline{\ell}_0$  ;
3.  $P_1(\underline{\ell})$  et  $D(\underline{\ell})$  sont des fonctions continûment différentiables de  $\underline{\ell}$ .

Alors la charge de démarrage de la propagation est

$$t_c = \min_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{2 \frac{\partial D}{\partial \ell_j}(\underline{\ell}_0)}{-\frac{\partial P_1}{\partial \ell_j}(\underline{\ell}_0)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- **Propagation progressive ou propagation brutale.** On se place dans les conditions suivantes :

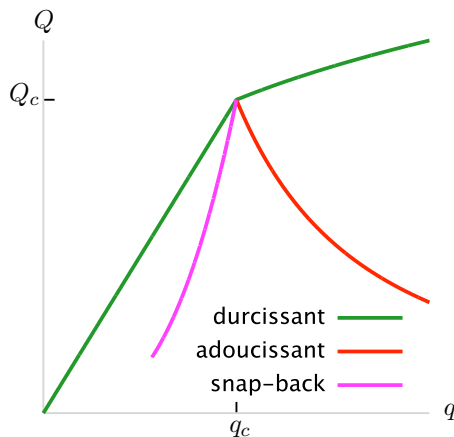
1. La structure est soumise à un chargement monotone ;
2. La fissuration ne dépend que d'un paramètre  $\ell$  et  $D(\ell) = G_c \ell$  ;
3.  $\ell \mapsto P_1(\ell)$  est strictement décroissante et continûment dérivable.

### Le résultat fondamental.

(i) Le problème d'évolution de Griffith admet une solution  $t \mapsto \ell(t)$  continue dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  durant lequel la fissure croît de  $\ell_0$  à  $\ell_1$  si et seulement si  $P'_1(\ell)$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[\ell_0, \ell_1]$ .

(ii) Lorsque cette solution continue existe, alors elle est unique et, à chaque instant  $t$ ,  $\ell(t)$  minimise l'énergie totale  $\mathcal{E}(t, \ell) = t^2 P_1(\ell) + G_c \ell$  par rapport à  $\ell$  sur l'intervalle  $[\ell_0, \ell_1]$ .

### Les réponses globales possibles.



$Q$  : force généralisée,

$q$  : déplacement généralisé,

$R(\ell)$  : raideur,  $S(\ell)$  : souplesse

$$\text{Phase de propagation : } \ell > \ell_0, \quad \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2G_c}{-R'(\ell)}} \\ Q = \sqrt{\frac{2G_c}{S'(\ell)}} \end{cases}$$

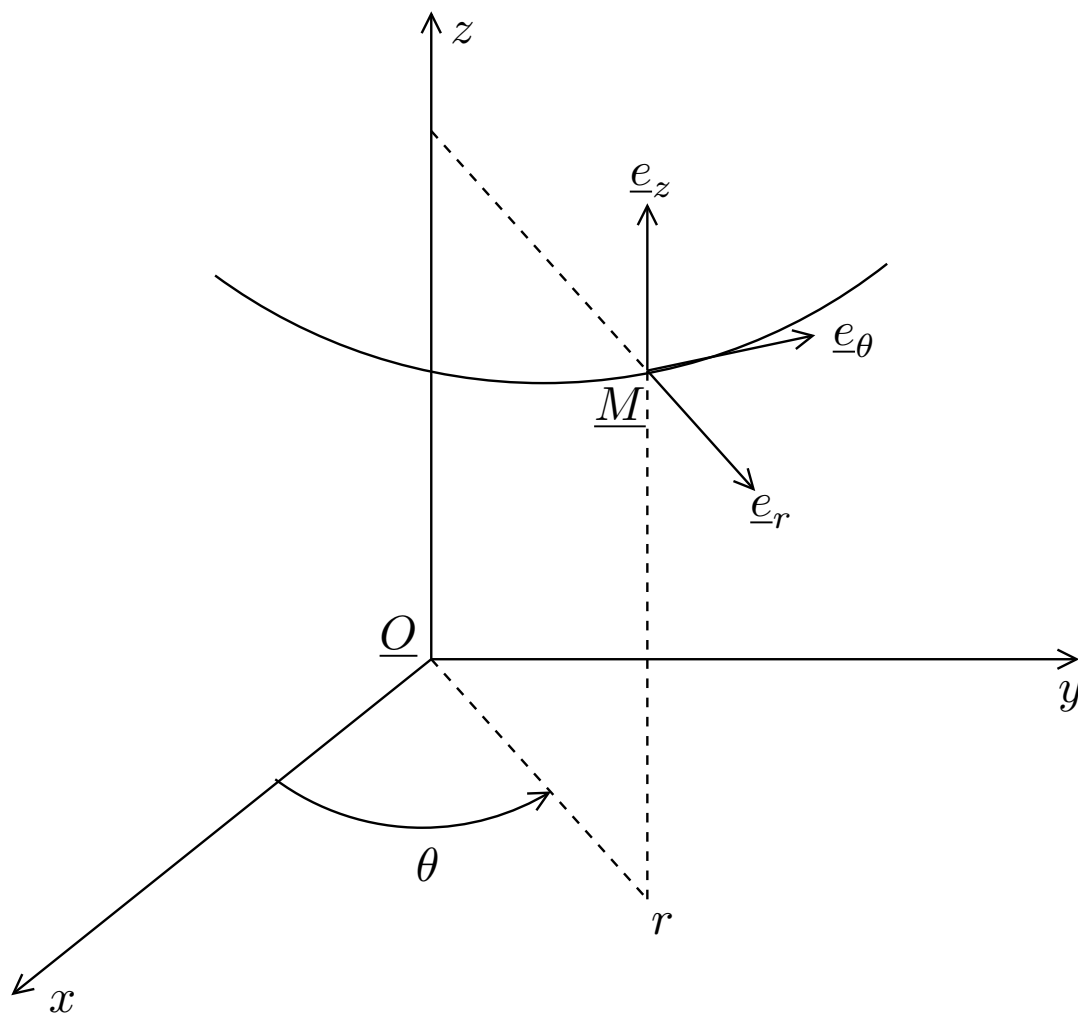
$$\begin{cases} \text{durcissant} & \text{si} & S'' < 0 \\ \text{adoucissant} & \text{si} & S'' > 0 \quad \text{et} \quad R'' > 0 \\ \text{snap-back} & \text{si} & R'' < 0 \end{cases}$$



Annexe B

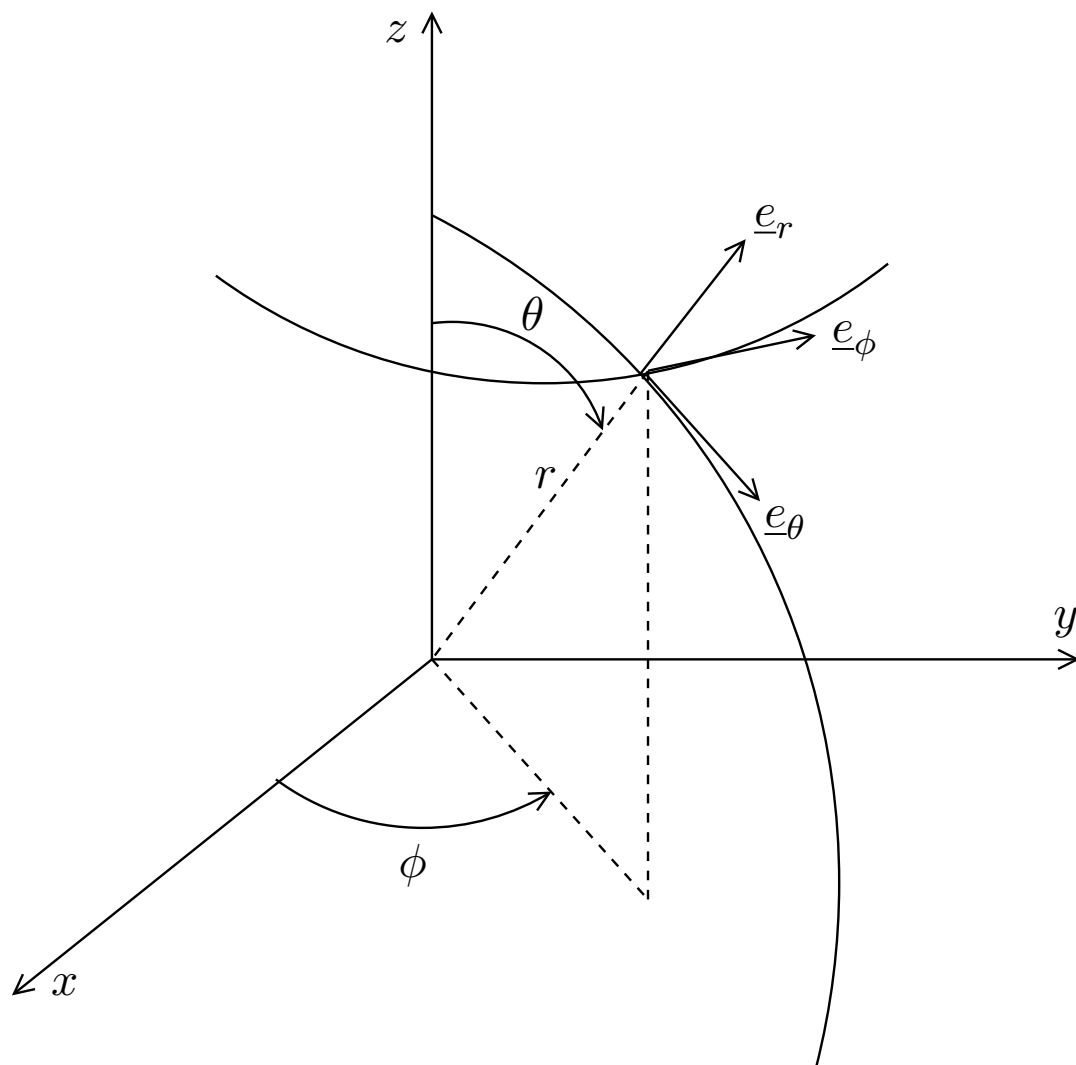
Formulaire

## B.1 Coordonnées cylindriques ou polaires



coordonnées	base orthonormée
$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z$	$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y$ $\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y$ $\underline{e}_z$
gradient	divergence
$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z$	$\text{div } \underline{\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$
laplacien	rotationnel
$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\underline{\text{rot}} \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\xi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
gradient vectoriel	déformations linéarisées
$\underline{\nabla} \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - \frac{\xi_\theta}{r} & \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} & \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \quad , \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r}$ $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} \quad , \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial \xi_r}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial r}$ $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \quad , \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z}$
divergence d'un champ de tenseurs symétriques	
$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{pmatrix}$	

## B.2 Coordonnées sphériques



coordonnées	base orthonormée
$x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$	$\underline{e}_r = \sin \theta \cos \phi \underline{e}_x + \sin \theta \sin \phi \underline{e}_y + \cos \theta \underline{e}_z$ $\underline{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \underline{e}_x + \cos \theta \sin \phi \underline{e}_y - \sin \theta \underline{e}_z$ $\underline{e}_\phi = -\sin \phi \underline{e}_x + \cos \phi \underline{e}_y$
gradient	divergence
$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \underline{e}_\phi$	$\text{div } \underline{\xi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta \xi_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} \right)$
laplacien	rotationnel
$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$	$\underline{\text{rot}} \underline{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta \xi_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \xi_\phi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r \xi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
déformations linéarisées	
$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r}$ $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r}$ $\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} + \cos \theta \xi_\theta \right) + \frac{\xi_r}{r}$	$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r}$ $2\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_r}{\partial \phi} - \frac{\xi_\phi}{r} + \frac{\partial \xi_\phi}{\partial r}$ $2\varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} - \cos \theta \xi_\phi \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta}$
divergence d'un champ de tenseurs symétriques	
$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \cos \theta \sigma_{r\theta} \right) + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \cos \theta \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}}{r} \right) + \frac{3\sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + 2 \cos \theta \sigma_{\phi\theta} \right) + \frac{3\sigma_{\phi r}}{r} \end{pmatrix}$	





# Notations

$A$	quantité non soulignée = scalaire
$\underline{A}$	quantité soulignée une fois = vecteur ( $A_i$ )
$\underline{\underline{A}}$	quantité soulignée deux fois = tenseur ou matrice ( $A_{ij}$ )
$\underline{\underline{A}}^T$	transposé du tenseur $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{\underline{A}}}$	quantité soulignée quatre fois = tenseur d'ordre 4 ( $A_{ijkl}$ )
$\otimes$	produit tensoriel
$\underline{a} \otimes \underline{b}$	produit tensoriel de $\underline{a}$ et $\underline{b}$ = tenseur ( $a_i b_j$ )
$\otimes_s$	produit tensoriel symétrisé
$\underline{a} \otimes_s \underline{b}$	produit tensoriel symétrisé de $\underline{a}$ et $\underline{b}$ = tenseur ( $\frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i)$ )
$u_i v_i$	convention de sommation = $\sum_i u_i v_i$
$\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$	produit contracté du tenseur $\underline{\underline{C}}$ et du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ = tenseur ( $C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ )
$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$	produit contracté du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ et du vecteur $\underline{n}$ = vecteur ( $\sigma_{ij} n_j$ )
$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$	produit scalaire des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ = $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$
$\llbracket f \rrbracket$	Saut de $f$ sur une surface de discontinuité
$\dot{\varepsilon}$	dérivée par rapport au temps de $\varepsilon$
$\  \cdot \ $	norme euclidienne
$\ \underline{u}\ $	norme euclidienne du vecteur $\underline{u} = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$
$\ \underline{\underline{\sigma}}\ $	norme euclidienne du tenseur $\underline{\underline{\sigma}} = \sqrt{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}}$
$\mathcal{C}$	ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles
$\mathcal{C}_0$	ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles à 0
$\underline{\underline{\underline{C}}}$	tenseur de rigidité
$\mathcal{D}$	énergie ou puissance dissipée
$D(\Gamma)$	énergie de fissuration de la structure dans l'état de fissuration $\Gamma$
$E$	module de Young
$\underline{e}_i$	i-ème vecteur de base
$\mathbb{E}$	domaine de réversibilité dans l'espace des déformations
$\mathcal{E}$	énergie totale

$\underline{\underline{\varepsilon}}$	tenseur ou champ des déformations
$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi})$	partie symétrique du gradient de $\underline{\xi}$
$\varepsilon_c$	déformation critique
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$	déformations élastiques
$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$	déformations plastiques
$G$	taux de restitution d'énergie potentielle
$G_c$	densité d'énergie de fissuration
$K_I, K_{II}; K_{III}$	facteurs d'intensité des contraintes
$K_{Ic}$	ténacité
$\lambda$	coefficient de Lamé
$\mathbb{M}_s^3$	ensemble des tenseurs $3 \times 3$ symétriques
$\mu$	module de cisaillement
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\nu$	coefficient de Poisson
$\Omega$	configuration de référence
$\partial_D \Omega$	partie du bord à déplacement contrôlé
$\partial_N \Omega$	partie du bord à force contrôlée
$\mathcal{P}$	énergie potentielle
$\pi_{\mathbb{S}}$	fonction d'appui du convexe $\mathbb{S}$
$P(t, \Gamma)$	énergie potentielle de la structure en équilibre à l'instant $t$ dans l'état de fissuration $\Gamma$
$Q$	force généralisée
$q$	déplacement généralisé
$\mathbb{Q}_e$	ensemble des charges élastiquement supportables
$\mathbb{Q}_p$	ensemble des charges supportables
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathcal{R}$	ensemble des champs de déplacements rigides admissibles
$R$	coefficient de raideur
$\mathcal{S}$	ensemble des champ de contraintes statiquement admissibles

$\underline{\underline{S}}$	tenseur de souplesse
$\underline{S}$	coefficient de souplesse
$\underline{s}$	déviateur des contraintes
$\sigma_{eq}$	contrainte équivalente de Von Mises
$\underline{\underline{\sigma}}^0$	tenseur ou champ des précontraintes
$\mathbb{S}$	domaine de réversibilité dans l'espace des contraintes
$\sigma_c$	contrainte critique
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur ou champ des contraintes
Tr	trace d'un tenseur
$\underline{\xi}$	vecteur ou champ des déplacements
$W$	potentiel élastique
$W_{\text{ext}}$	travail des efforts extérieurs donnés
$W^*$	potentiel élastique dual
$\mathcal{W}$	travail de déformation
$\underline{x}$	vecteur position



# Bibliographie

- [1] J. D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Editions Ellipses, 2005.
- [3] M. Amestoy. *Propagation de fissures en élasticité plane*. Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.
- [4] M. Amestoy and J.-B. Leblond. Crack paths in plane situation – II, Detailed form of the expansion of the stress intensity factors. 29(4) :465–501, 1992.
- [5] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, pages 55–129, 1962.
- [6] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1-3) :5–148, APR 2008.
- [7] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [8] H. D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- [9] G. P. Cherepanov. *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw-Hill International Book Company, 1979.
- [10] P. Destuynder and M. Djaoua. Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile. 3 :70–87, 1981.
- [11] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8 :100–108, 1960.
- [12] I. Ekeland and R. Temam. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [13] L. B. Freund. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [14] A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, CCXXI(A) :163–198, 1920.
- [15] P. Grisvard. *Elliptic problems in non smooth domains*. Number 24 in Monographs and Studies in Mathematics. Pitman, 1985.
- [16] P. Grisvard. Problèmes aux limites dans les polygones; mode d'emploi. *EDF, Bulletin de la Direction des Études et Recherches*, Série C(1) :21–59, 1986.
- [17] B. Halphen and J. Salençon. *Élastoplasticité*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987.
- [18] G. R. Irwin. Fracture. *In Handbuch der Physik*, Springer Verlag, 6 :551–590, 1958.

- [19] B. Lawn. *Fracture of Brittle Solids - Second Edition*. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University press, Cambridge, 1993.
- [20] P. Le Tallec. *Modélisation et calcul des milieux continus*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2009.
- [21] J.-B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Collection Études en mécanique des matériaux et des structures. Editions Lavoisier, 2000.
- [22] J.-J. Marigo. *Mécanique des Milieux Continus I*. Cours de l'Ecole Polytechnique Edition 2015.
- [23] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, 1983.
- [24] S. A. Meguid. *Engineering Fracture Mechanics*. Elsevier Applied Science, 1989.
- [25] A. Mielke. Evolution of rate-independent systems. In *Evolutionary equations*, volume II of *Handb. Differ. Equ.*, pages 461–559. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.
- [26] N. I. Muskhelishvili. *Some basic problems of mathematical theory of elasticity*. P. Noordhoff Ltd, Groningen, 2<sup>nd</sup> edition, 1963.
- [27] Q. S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley & Son, London, 2000.
- [28] J. R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. 35 :379–386, 1968.
- [29] J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [30] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus - Tome I : Concepts généraux*. Collections Ellipses, 2005.
- [31] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus - Tome II : Thermoélasticité*. Collections Ellipses, 2007.
- [32] S. Suresh. *Fatigue of materials*. Cambridge Editions, 1998.

# Index

- adoucissement, 58, 129, 209, 221
- approche par l'extérieur, 130
- approche par l'intérieur, 130
- bande de cisaillement, 115, 138
- charge élastiquement supportable, 128
- charge limite, 115, 122, 129–138
- charge limite élastique, 115, 127
- charge potentiellement supportable, 130
- charge supportable, 131, 133
- chargement cyclique, 115
- cinématiquement admissible, 31
- coefficient de dilatation thermique, 23
- coefficient de Poisson, 20
- coefficients de Lamé, 20
- coefficients de raideur, 42, 46
- coefficients de souplesse, 42, 46
- coercivité, 23
- comportement élastique, 19
- conditions aux limites mixtes, 16
- conditions de compatibilité, 13
- conditions de Dirichlet, 16
- conditions de Neumann, 16
- cône des normales extérieures, 96
- configuration déformée, 11
- configuration de référence, 11
- contrainte équivalente, 99
- contrainte effective, 147
- contrainte interne, 147
- contrainte résiduelle, 115, 139
- contraintes de Cauchy, 14
- contraintes de Piola-Kirchhoff, 14
- convention de sommation, 13
- critère de cisaillement maximal, 106
- critère de plasticité, 85
- critère de Tresca, 99
- critère de Von Mises, 99
- déformation élastique, 84
- déformation plastique, 84
- déformation résiduelle, 59
- déformation thermique, 23
- déformation totale, 84
- déformations de Green-Lagrange, 13
- déformations planes, 25
- déplacement généralisé, 42
- déplacements rigides, 12
- déplacements rigides admissibles, 38
- déformation plastique cumulée, 88
- déplacements admissibles à 0, 32
- Deuxième Principe de la Thermodynamique, 92
- dislocation, 63
- domaine d'élasticité, 85
- domaine de réversibilité, 85
- ductile, 61
- durcissant, 220
- durcissement, 59, 80, 129
- écrouissage, 80
- écrouissage cinématique linéaire, 87
- écrouissage matériel, 122, 150
- écrouissage structurel, 115, 122, 129, 150
- effet Bauschinger, 87
- effet Mullins, 59
- effets d'échelle, 217
- endommagement, 59
- endurance, 233
- énergie complémentaire, 37
- énergie de fissuration, 197–200, 232
- énergie dissipée, 78, 82, 143
- énergie dissipée par frottement, 83
- énergie dissipée, 78
- énergie élastique, 77, 78, 82, 83, 91



énergie potentielle, 36, 143, 187, 203  
 énergie totale, 143  
 équations de Navier, 25  
 essai de flexion SENB, 177  
 essai de traction-torsion, 112  
 essai sur éprouvette CT, 177  
  
 Facteurs d'Intensité des Contraintes, 155  
 fatigue, 115  
 fluage, 62, 115  
 fonction d'Airy, 26  
 fonction d'appui, 133  
 fonction seuil, 85  
 force généralisée, 42  
 forces de cohésion, 166  
 forces de contact, 167  
 formule d'Irwin, 191  
 formule de Clapeyron, 39  
 fragile, 61  
 front de fissure, 174  
  
 G-max, 224  
 gradient de la transformation, 12  
  
 hypothèse des petites perturbations, 13, 116  
  
 Inégalité de Clausius-Duhem, 92  
 incompressibilité plastique, 98  
 indépendant des vitesses, 84  
 interpénétration, 173  
 irréversibilité, 201  
  
 lois standards, 89  
  
 mécanismes de ruine, 136  
 Méthode des Eléments Finis, 35  
 matériau hyperélastique, 23  
 matériau isotrope, 20  
 modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt, 71  
 modèle viscoélastique de Maxwell, 71  
 mode d'ouverture, 173  
 mode de déchirure, 174  
 mode de glissement, 173  
 mode I, 173  
 mode II, 173  
 mode III, 174  
  
 module d'Young, 20  
  
 offset, 112  
  
 plasticité, 59  
 plasticité avec écrouissage, 86  
 plasticité parfaite, 86  
 Postulat de Drucker-Ilyushin, 89  
 potentiel élastique, 19  
 potentiel élastique dual, 20  
 Principe de Symétrie Locale, 224  
 Principe du Travail Plastique Maximal, 89  
 problème d'évolution, 115  
 problème incrémental en temps, 142  
 propriété de réciprocité de Maxwell-Betti, 47  
 puissance de la singularité, 155  
  
 quasi-statique, 84  
  
 relaxation, 62  
 réversibilité, 19  
  
 snap-back, 221  
 statiquement admissible, 32  
 striction, 60  
 surface seuil de plasticité, 85  
  
 ténacité, 177  
 taux de création d'énergie de fissuration, 200  
 taux de restitution d'énergie potentielle, 187  
 tenseur d'écrouissage, 87  
 tenseur de déformation plastique, 84  
 tenseur de rigidité, 19  
 tenseur de souplesse, 19  
 tenseur des contraintes, 14  
 tenseur des contraintes internes, 109  
 tenseur des déformations, 12  
 tenseur des précontraintes, 23  
  
 variable d'état, 84  
 vecteur déplacement, 11  
 vitesse de déformation, 61  
 vitesses virtuelles admissibles, 32